

SUOMEN METSÄTIETEELLINEN SEURA — FINSKA FORSTSAMFUNDET

(SOCIETY OF FORESTRY IN FINLAND — FORSTWISSENSCHAFTLICHE GESELLSCHAFT  
IN FINNLAND — SOCIÉTÉ FORESTIÈRE DE FINLANDE)

# SILVA FENNICA

76.

ÜBER DIE MECHANISCHE  
SCHAFTFORMTHEORIE DER BÄUME

ARVO YLINEN

HELSINKI 1952

# Über die mechanische Schaftformtheorie der Bäume

VON  
ARVO YLINEN

## 1. Einleitung<sup>1</sup>

Zur Erklärung der Schaftform der Bäume sind bisher drei verschiedene Grundlagen zur Deutung der hierhergehörenden Erscheinungen angegeben worden, und zwar sind diese

1. die mechanische Schaftformtheorie,
2. die Transpirationstheorie,
3. die Assimilationstheorie.

Die mechanische Schaftformtheorie ist von SCHWENDENER<sup>2</sup> i.J. 1874 angegeben worden. METZGER<sup>3</sup> hat dieselbe weiter entwickelt, indem er ihr eine für die Anwendung in der Forstwissenschaft geeignete Form erteilte. Nach dieser Theorie gestaltet sich die Form des Stammes in der Natur frei wachsender Bäume derart, dass dieser eine Säule von gleichbleibender Festigkeit in bezug auf die darauf einwirkenden mechanischen Beanspruchungen darstellt. Die von JACCARD<sup>4</sup> i.J. 1919 dargestellte Transpirationstheorie wiederum gründet sich auf die Annahme, dass die Form des Baumstammes von der Befriedigung des Wasserbedarfs der Baumkrone bestimmt wird. Als eine Grundlage zur Erklärung der Schaftform kann nach GANSSSEN<sup>5</sup> und GÖRZ der Assimilationsprozess des Baumes angenommen werden.

---

<sup>1</sup> Die Verdeutschung der Arbeit wurde von Herrn Mag.Phil. U. ATTILA ausgeführt, dem ich hiermit meinen besten Dank aussprechen möchte.

<sup>2</sup> S. v. SCHWENDENER, *Das mechanische Prinzip im anatomischen Bau der Monocotylen*. Leipzig 1874.

<sup>3</sup> CARL METZGER, *Mündener forstliche Hefte*. Berlin 1893.

<sup>4</sup> PAUL JACCARD, *Nouvelles recherches sur l'accroissement en épaisseur des arbres*. Lausanne et Genève 1919.

<sup>5</sup> GANSSSEN u. GÖRZ, *Mitt. aus dem Lab. d. Preuss. Geol. Landesanstalt*. — S. auch ERH. HAUSENDORFF, *Deutsche Waldwirtschaft*.

Der Ausbau dieser Hypothese ist bis auf Weiteres nicht über sein Anfangsstadium herauskommen, und daher ist es noch nicht erkenntlich, ob dieselbe eine taugliche Erklärung für die Schaftform der Bäume liefern kann. — In der vorliegenden Darstellung soll nur die mechanische Schaftformtheorie besprochen werden.

Als elementarste Art der Anwendung der mechanischen Schaftformtheorie zur Erklärung der Gestalt des Baumstammes kann der in Abb. 1 gezeigte Fall angesehen werden. Der auf die von der Baumkrone gebildete Windfläche  $A$  einwirkende Winddruck ist durch die im Schwerpunkt  $C$  der Fläche  $A$  angreifende waagerechte resultierende Kraft  $F$  ersetzt gedacht<sup>1</sup>. In einem Stammquerschnitt im Abstand  $z$  vom Punkt  $C$  beträgt das Biegemoment  $M = Fz$ . Unter der Annahme, dass sich die Biegespannungen linear auf den Stammquerschnitt verteilen, kann man zur Bestimmung derselben die technische Biegelehre anwenden, derzufolge  $M = \sigma_b W$  ist. Hier bezeichnet  $\sigma_b$  die in den Randfasern entstehende Biegespannung und  $W$  das Widerstandsmoment des Stammquerschnittes. Durch Eliminieren von  $M$  aus diesen Gleichungen und Einsetzen von  $W = \pi d^3/32$  für den kreisförmigen Querschnitt sowie von  $\sigma_b = \sigma_{bB}/n$ , wo  $\sigma_{bB}$  die Biegefestigkeit des Holzes und  $n$  einen unveränderlichen Sicherheitsbeiwert bezeichnet, ergibt sich die Gleichung

$$(1) \quad d^3 = \frac{32 n F}{\pi \sigma_{bB}} z.$$

Diese Gleichung stellt also die Meridiankurve einer durch eine transversale Einzelkraft an ihrem oberen Ende belasteten Säule von gleichbleibender Festigkeit gegen Biegung dar. Bezüglich der Biegefestigkeit  $\sigma_{bB}$  des Holzes ist bei den bisherigen Untersuchungen im allgemeinen angenommen worden, dass diese an jeder Stelle des Stammes konstant sei. Die durch Gleichung (1) definierte Säule ist dann ein kubisches Paraboloid.

Aus der Gleichung (1) ist ersichtlich, dass das Bestimmen des Stammdurchmessers, d.h. also der absoluten Abmessungen des Stammes die Kenntnis der vom Wind hervorgerufenen Kraft  $F$  sowie der zulässigen Biegefestigkeit  $\sigma_{bB}/n$  der äussersten Fasern im Stamm zur Voraussetzung hat. Von dieser Einschränkung kann man sich indessen leicht befreien, wenn man sich statt der absoluten Abmessungen des Stammes nur mit der Bestimmung seiner Form, d.h. seiner relativen Abmessungen begnügt. Nach Abb. 1 entspricht dem Wert  $z = l$   $d = D$ , womit aus Gleichung (1) folgt:  $D^3 = 32 n F l / \pi \sigma_{bB}$ . Beiderseitige Division der Gleichung (1) mit der soeben erhaltenen ergibt, mit der abermaligen Annahme, dass  $\sigma_{bB}$  konstant ist,

$$(2) \quad \left(\frac{d}{D}\right)^3 = \frac{z}{l};$$

<sup>1</sup> In Abb. 1 ist der Anschaulichkeit halber die Kraft  $F$  in der Zeichenebene liegend gezeigt, obgleich sie in Wirklichkeit in der Richtung senkrecht auf der Fläche  $A$  wirksam ist.

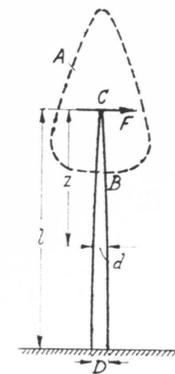


Abb. 1. Einfachster Fall der mechanischen Schaftformtheorie der Bäume.

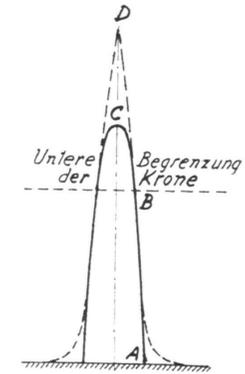


Abb. 2. Die Stammkurve nach Gleichung (2) (ausgezogen) im Vergleich mit der tatsächlichen Meridiankurve eines Baumes (gestrichelt).

diese Gleichung gibt den relativen Durchmesser  $d/D$  des Stammes in Abhängigkeit von der relativen Stammhöhe  $z/l$  an. Hieraus geht hervor, dass in dem in Abb. 1 dargestellten einfachen Fall der relative Durchmesser des Stammes unabhängig von der Windkraft und der zulässigen Biegefestigkeit des Holzes ist. Dies trifft jedoch nicht mehr bei der vollständigeren mechanischen Schaftformtheorie der Bäume zu, in welcher der sowohl auf die Baumkrone als auch auf den Stamm einwirkende Winddruck und die Veränderlichkeit der Biegefestigkeit in der Längsrichtung des Stammes Berücksichtigung finden. Die Abhängigkeit von der Windkraft, also von der Windgeschwindigkeit, ist indessen so schwach, dass man mit einer in der Praxis hinreichenden Genauigkeit den relativen Durchmesser als unabhängig von der Windgeschwindigkeit erachten kann. Diese Frage wird im Abschnitt 12 dieser Arbeit näher besprochen.

Vergleichshalber sind in Abb. 2 die der Gleichung (2) entsprechende Kurve und die wirkliche Meridiankurve eines Baumstammes einander gegenübergestellt. Es liegt auf der Hand, dass die mechanische Schaftformtheorie, in der im obigen beschriebenen elementaren Weise angewandt, ein wahrheitsgetreues Bild von den Abmessungen oder Verhältnissen des Stammes nur auf dem astfreien Abschnitt liefern kann, da nur auf dieser Strecke der Wert des Biegemoments unabhängig von der Art der Verteilung der Belastung  $F$  auf der Kronenfläche  $A$  ist. Auf der Strecke  $BC$  zeitigt Gleichung (2) zu kleine Werte des Durchmessers, und zwischen  $C$  und  $D$  kann man überhaupt keine Stammkurve erhalten, weil der Ausdruck  $Fz$  für das Biegemoment nur für positive Werte von  $z$  Gültigkeit hat. Ausser am Wipfelende stellt sich eine beträchtliche Abweichung zwischen den beiden Kurven auch

im Basalabschnitt des Stammes ein; daselbst kann an Hand der Gleichung (2) der in der wirklichen Stammkurve vorkommende Wurzelanlauf nicht zum Vorschein gebracht werden.

Die im obigen dargebotene kurze Beschreibung der mechanischen Schaftformtheorie in ihrer einfachsten Gestalt enthält nahezu alles, was an Wesentlichem bisher in der Fachliteratur betreffs der mechanischen Seite dieser Theorie dargestellt worden ist. Als Ausnahme ist jedoch die Untersuchung von TIRÉN<sup>1</sup> zu erwähnen, in der die mechanische Schaftformtheorie verhältnismässig gründlich vom mathematischen Standpunkt behandelt worden ist. Da indessen auch in seiner Arbeit der die Baumkrone belastende, gleichmässig verteilte Winddruck durch eine einzige resultierende Kraft ersetzt ist und die Biegefestigkeit des Holzes in der Längsrichtung des Stammes als konstant angenommen wird, weichen die von ihm erzielten Ergebnisse dermassen von den in der Natur bestehenden Verhältnissen ab, dass ihnen schwerlich grosse Bedeutung beizumessen ist. Um feststellen zu können, ob die mechanische Schaftformtheorie stichhaltig ist, ist man genötigt, diese auf eine solche Stufe zu entwickeln, dass das Anstellen zuverlässiger Vergleiche zwischen den von der Theorie gelieferten Resultaten und aus der Natur gewonnenen Messergebnissen möglich wird. Dies bedingt eine bedeutende Vervollständigung der mechanischen Schaftformtheorie der Bäume und einen Ausbau derselben in verschiedenen Richtungen. An solchen Faktoren, deren Wirkung bisher ungeklärt geblieben ist, die aber unbedingt in der mechanischen Schaftformtheorie berücksichtigt werden müssen, will man sie in eine anwendbare Gestalt bringen, seien hier folgende angeführt:

1. Die Verteilung des Winddruckes auf der Fläche der Krone,
2. Die Form der von der Krone gebildeten Windfläche,
3. Die Bruchhypothese des Holzes,
4. Die Veränderlichkeit der Biegefestigkeit oder des Elastizitätsmoduls des Holzes längs des Stammes,
5. Der Einfluss des Gewichtes von Stamm und Krone,
6. Der Wurzelanlauf.

Die vorliegende Untersuchung bezweckt eine derartige Vervollständigung der mechanischen Schaftformtheorie der Bäume, dass darin die oben aufgezählten Umstände Berücksichtigung finden. Es wird sich zeigen, dass die mechanische Schaftformtheorie der Bäume, auf diese Weise vervollkommenet, in guter Übereinstimmung mit den Messungen an in der Natur wachsenden Bäumen steht. In dieser Arbeit wird die Aufmerksamkeit in erster Linie auf die Bestimmung der relativen Abmessungen des Stammes gerichtet, da die absolute Grösse des auf die Baumkrone einwirkenden Winddruckes und die dementsprechende Biegespannung oder die Zusammendrückung des Stammes vorläufig immerhin so schlecht bekannt

<sup>1</sup> LARS TIRÉN, *Einige Untersuchungen über die Schaftform*. Meddelanden från Statens Skogs-försöksanstalt, Häfte 24, Nr. 4. Stockholm 1929.

sind, dass die absoluten Abmessungen des Baumstammes nicht genügend genau berechnet werden können.

Der Grund dafür, dass sich die mechanische Schaftformtheorie der Bäume seit METZGER nur sehr langsam und auf unvollständige Weise entwickelt hat, dürfte darin zu suchen sein, dass das in Frage stehende Problem ein typischer, auf das Gebiet mehrerer Wissenschaftszweige übergreifender Grenzfall ist. Das Bestimmen der Schaftform von Bäumen unter Anwendung der mechanischen Schaftformtheorie erfordert nämlich das Anwenden von Errungenschaften der Aerodynamik, der Festigkeitslehre und der Forstwissenschaft. Überdies führt die Berücksichtigung des vom Eigengewicht des Stammes und der Baumkrone herrührenden Biegemoments in mathematischer Hinsicht zu recht schwierigen Problemen. Das befriedigende Lösen der Aufgabe bedingt daher eine Zusammenarbeit von Fachleuten aller dieser Gebiete.

## 2. Die Windgeschwindigkeit im Waldbestand

Das vom Wind hervorgerufene Biegemoment in den verschiedenen Teilen des Baumstammes hängt entscheidend von der Geschwindigkeit des Windes im Waldbestand ab. Zur Aufklärung dieser Frage hat TIRÉN<sup>1</sup> einige Untersuchungen ausgeführt. Da jedoch seine Messergebnisse nach seinen eigenen Worten sehr approximativer Art sind, wird auf dieselben hier nicht näher eingegangen.

Zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit im Waldbestand hat der Verfasser im Sommer 1951 einige Versuche angestellt, die im folgenden beschrieben werden. Zur Messung der Windgeschwindigkeit wurde die in Abb. 3 dargestellte Apparatur

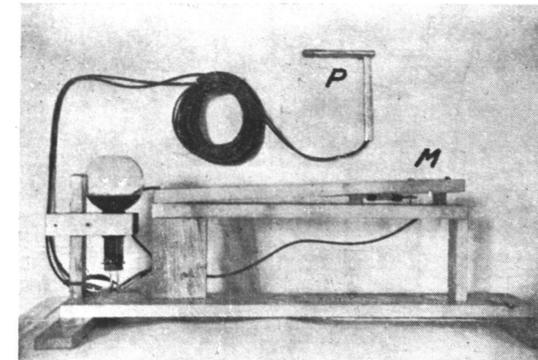


Abb. 3. Das zur Messung der Windgeschwindigkeit benutzte Staugerät *P* nach PRANDTL und Mikromanometer *M*.

<sup>1</sup> A. a. O. S. 86.

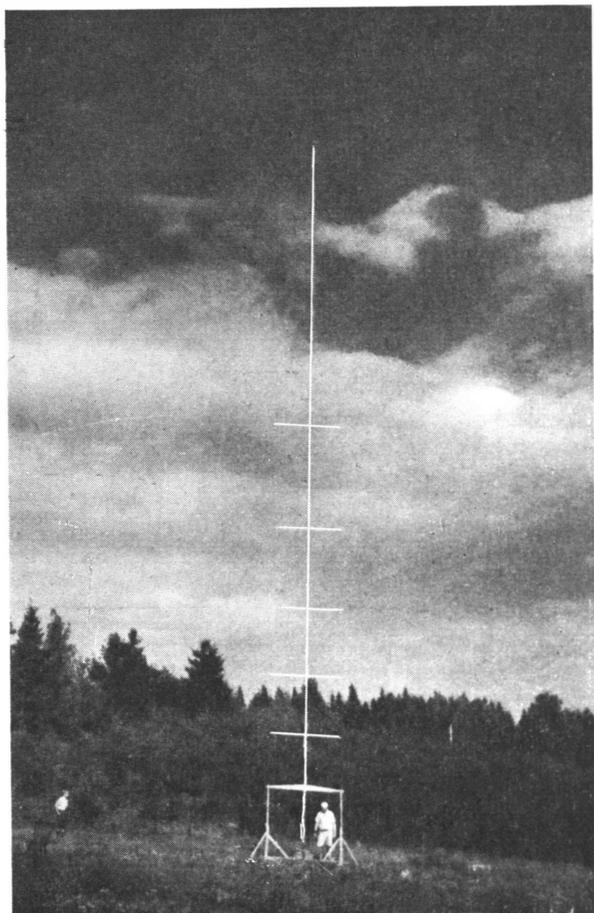


Abb. 4. Mast zur Ausführung der Windmessungen.

benutzt. Diese umfasste ein Staugerät  $P$  nach PRANDTL, von dem der statische Druck und der Gesamtdruck (die Summe des statischen und dynamischen Druckes) mittels zweier dünner Gummischläuche zu einem Mikromanometer  $M$  mit geneigtem Ableschenkel geleitet wurde. Die kleinste Windgeschwindigkeit, die mit dieser Vorrichtung noch eben messbar war, betrug  $V \approx 0,4 \text{ m/s}$ .

Zur praktischen Ausführung der Windmessungen war das Staugerät am oberen Ende des in Abb. 4 gezeigten, 19 m hohen Mastes befestigt. An seinem unteren Ende war dieser mit einer querliegenden Achse versehen, um die er in eine beliebige

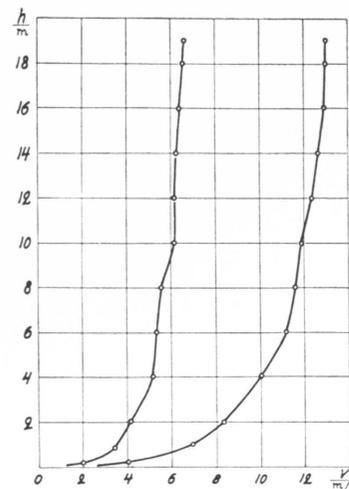


Abb. 5. Die Windgeschwindigkeit in offenem Gelände.

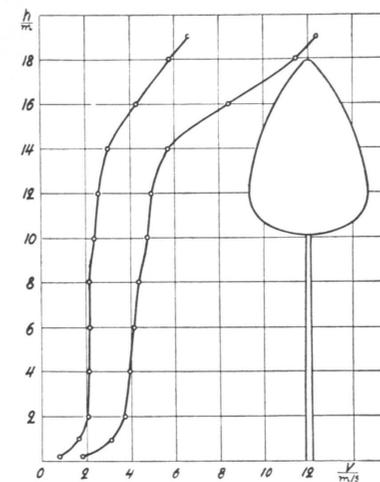


Abb. 6. Die Windgeschwindigkeit im Waldbestand.

Schräglage gekippt werden konnte. Um die Handhabung zu erleichtern, trug das untere Ende des Mastes ein Gegengewicht von so gewählter Grösse, dass dieses den Mast in jeder Lage genau im Gleichgewicht hielt. Mit Rücksicht auf möglichst leichten Transport und leichte Handhabung im Walde war ein möglichst kleines Gewicht des Mastes von grosser Bedeutung. Er war deshalb als Fachwerk ausgebildet, in dem die zugbeanspruchten Diagonalen und Gurte aus Stahldrähten bestanden. Die in der Abbildung sichtbaren querliegenden Druckstäbe sind aus Holz. Das Gewicht des so konstruierten Mastes betrug nur 12 kp. Die Gummischläuche, welche die Verbindung zwischen dem Staugerät am oberen Ende des Mastes und dem Mikromanometer auf dem Erdboden herstellten, waren am Mast entlanggeführt und an demselben befestigt.

Mit dem beschriebenen Messgerät wurde zuerst die Verteilung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe auf einem offenen Acker bei zwei verschiedenen Windstärken untersucht. Das Ergebnis zeigt Abb. 5. Man sieht, dass ganz an der Erdoberfläche die Geschwindigkeit Null ist, wie es sich ja auch nach den Randbedingungen eines reibenden Mediums verhalten soll. Mit der Entfernung vom Erdboden nimmt die Windgeschwindigkeit anfangs rasch und in grösseren Höhen langsamer zu. Die Streuung der Messwerte ist hauptsächlich auf die Turbulenz des Windes zurückzuführen, die recht grosse Geschwindigkeitsschwankungen verursachen kann. Indem in jeder untersuchten Höhe während einer längeren Zeit Beobachtungen gemacht werden, ist es jedoch möglich, einen zuverlässigen Mittelwert zu finden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass im Falle rascher Geschwindigkeitsschwankungen

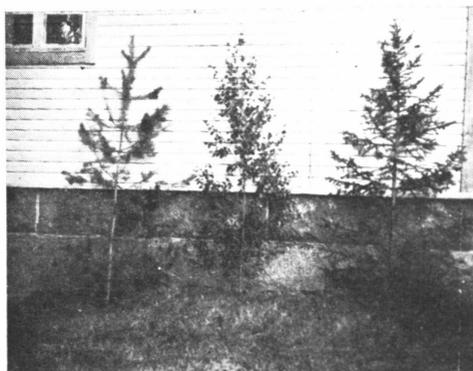


Abb. 7. Die bei den Windkanalversuchen benutzten Kronen von Kiefer, Birke und Fichte.

die mittlere Manometerablesung nicht dem Geschwindigkeitsmittel sondern vielmehr dem Mittel aus den Geschwindigkeitsquadraten entspricht, da das Manometer den Druck anzeigt.

Abb. 6 zeigt die Verteilung der Windgeschwindigkeit in einem Mischwald von mittlerem Schlussgrad, in welchem die herrschenden Bäume eine mittlere Höhe von 18 m bei einer unteren Grenze der Kronen in ca. 10 m Höhe aufwiesen. Man sieht, dass die Verteilung der Windgeschwindigkeit beträchtlich verschieden von dem Befund über offenem Gelände ist. Die Windgeschwindigkeit verschwindet auch hier am Erdboden; beim Aufwärtsschreiten nimmt sie rasch zu und behält danach einen nahezu konstanten Wert auf dem astfreien Abschnitt der Baumstämme bei, um in Höhe der Baumkronen wieder ziemlich schnell anzusteigen. Hieraus ersieht man, dass die vom Wind herbeigeführte Belastung in den verschiedenen Teilen des Stammes stark verschieden ist.

### 3. Der Widerstandsbeiwert der Baumkrone und des Stammes

Zur Bestimmung der den Baum biegenden Windkraft ist es notwendig, die aerodynamischen Eigenschaften der Baumkrone, in erster Linie ihren Widerstandsbeiwert, zu kennen. Um diesen zu ermitteln, hat der Verfasser i.J. 1951 Windkanalversuche im Windkanal der VMT Flugzeugwerke in Tampere ausgeführt<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Es sei mir gestattet, dem Geschäftsführer der VMT Flugzeugwerke, Herrn Ingenieuroberst R. RISSANEN, der mir freundlichst die Erlaubnis zur Ausführung der besagten Windkanalversuche erteilt hat, meinen verbindlichen Dank auszusprechen. Desgleichen bin ich dem Vorstand des Prüflaboratoriums der VMT Flugzeugwerke, Herrn Dipl.-Ing. P. JÄRVENPÄÄ, der mit ausserordentlicher Sorgfalt die Versuche selbst ausgeführt und ihre Ergebnisse verarbeitet hat, zu Dank verbunden.

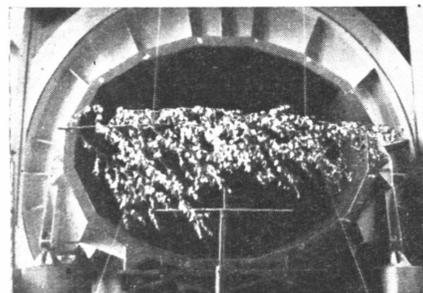


Abb. 8. Die Aufhängung der Birkenkrone in der Messstrecke des Windkanals.



Abb. 9. Zur Bestimmung der Projektionsfläche der Birkenkrone.

Die Versuche erfolgten mit den in Abb. 7 gezeigten Kronen einer Kiefer, einer Birke und einer Fichte, jede 2,8 m lang. Die Aufhängung der Birkenkrone in der Messstrecke ist aus Abb. 8 ersichtlich. Nach Messung des von der Luftströmung verursachten Widerstandes  $F$ , der Geschwindigkeit  $V$  des Luftstromes und der Luftdichte  $\rho$  wurde der Widerstandsbeiwert der Krone nach der Formel

$$(3) \quad c_w = \frac{F}{\rho A}$$

berechnet. Hierin ist

$$(4) \quad q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

der Staudruck der Strömung und  $A$  die Projektionsfläche der Krone. Dies wurde bestimmt durch Photographieren der Krone, Nachzeichnen ihrer Konturlinie und Ausmessen der eingeschlossenen Fläche, wie Abb. 9 für die Birkenkrone zeigt. Auf diese Weise ergaben sich für die Projektionsflächen der drei Kronen folgende Werte: Kiefer —  $A = 1,42 \text{ m}^2$ , Birke —  $A = 1,09 \text{ m}^2$  und Fichte —  $A = 1,84 \text{ m}^2$ .

In Abb. 10 ist der Luftwiderstand  $F$  der Kronen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $V$  des Luftstromes dargestellt. Die kleinen Kreise bezeichnen die Messwerte, welche graphisch ausgeglichen sind. Mit zunehmender Geschwindigkeit von Null an steigt der Widerstand zuerst parabolisch und danach langsamer, annähernd linear, an. Die Gestalt der Widerstandskurven ist somit wesentlich verschieden von der gewohnten, dem quadratischen Widerstandsgesetz entsprechenden Parabelform. Dies ist darauf zurückzuführen, dass mit wachsender Geschwindigkeit

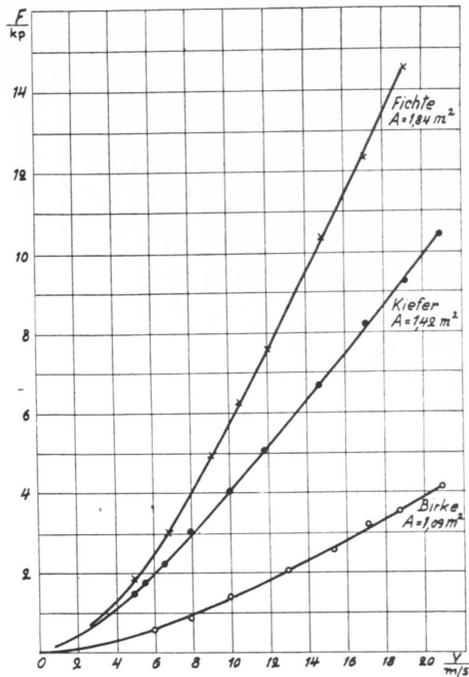


Abb. 10. Der Luftwiderstand der Kiefern-, Fichten- und Birkenkrone in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit.

keit anfangs die Blätter bzw. Nadeln des Baumes und bei grösseren Geschwindigkeiten sogar ganze Zweige sich mehr und mehr in die Strömungsrichtung der Luft stellen, wodurch ihre Projektionsfläche verringert und das Anwachsen des Widerstandes verlangsamt wird.

Das anschaulichste Bild von dem aerodynamischen Widerstand der verschiedenen Baumarten erhält man durch Darstellen ihrer Widerstandsbeiwerte nach Gleichung (3) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $V$ . Dies ist in Abb. 11 geschehen. Man sieht aus der Abbildung, dass die Widerstandsbeiwerte der drei untersuchten Baumarten in recht bedeutendem Masse verschieden sind. Alle drei haben sie die Eigenschaft gemeinsam, dass der Widerstandsbeiwert mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt. Dies rührt von der oben beschriebenen fortschreitenden Orientierung der Blätter bzw. Nadeln und bei höheren Geschwindigkeiten ganzer Zweige nach der Strömungsrichtung her. Der niedrige Widerstandsbeiwert der Birkenkrone lässt sich offenbar dadurch erklären, dass sich die Blätter der Birke

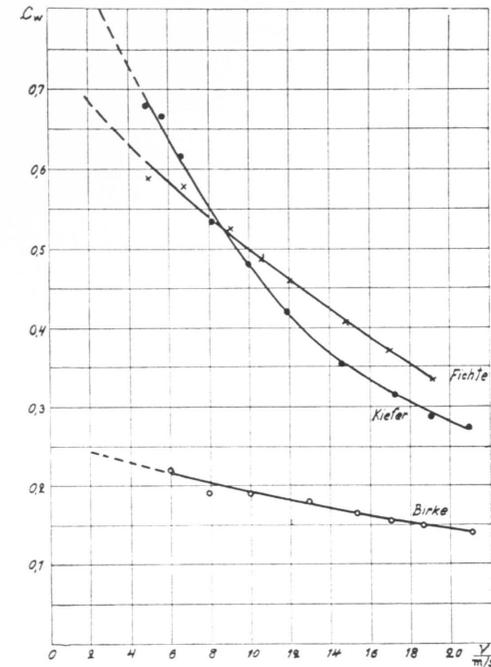


Abb. 11. Der Widerstandsbeiwert der Kiefern-, Fichten- und Birkenkrone in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit.

bereits bei sehr kleinen Geschwindigkeiten völlig in die Richtung der Luftströmung stellen. Der Grund dafür, dass mit zunehmender Geschwindigkeit der Widerstandsbeiwert bei der Fichte langsamer als bei der Kiefer abfällt, liegt in der grösseren Steifigkeit der Nadeln und Zweige der Fichte. Die Werte der Widerstandsbeiwerte für Geschwindigkeiten  $V < 5$  m/s sind extrapoliert. Irgendwelche Zusammenhänge des Widerstandsbeiwerts mit der REYNOLDS'schen Zahl brauchen hier nicht beachtet werden, da die Versuche mit Baumkronen in Naturgrösse und bei Geschwindigkeiten ausgeführt wurden, die den Windstärken in der Natur gleichkommen.

Für den Widerstandsbeiwert des Baumstammes kann der gleiche Wert,  $c'_w = 1$ , wie für einen im Vergleich zu seiner Dicke langen Kreiszyylinder<sup>1</sup> angenommen werden.

<sup>1</sup> S. z. B. *Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*, II Lfg. München 1923.

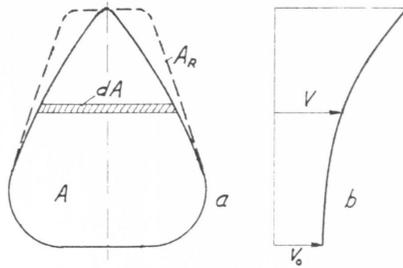


Abb. 12. Zur Bestimmung der reduzierten Windfläche der Baumkrone.

#### 4. Die reduzierte Windfläche der Krone

Zur Bestimmung der auf die Baumkrone einwirkenden Windkraft denken wir uns die Projektionsfläche der Krone in schmale wagerechte Streifen mit dem Flächeninhalt  $dA$  zerlegt (Abb. 12). Den aerodynamischen Regeln zufolge lässt sich die an einem solchen Flächenelement angreifende Kraft in der Gestalt

$$dF = c_w \frac{\rho}{2} V^2 dA$$

ausdrücken. Unter Einführung einer beliebigen Bezugsgeschwindigkeit  $V_0$  und des dieser zugeordneten Bezugs-Widerstandsbeiwertes  $c_{w_0}$  erhält man hieraus für die auf die gesamte Krone einwirkende Windkraft den Ausdruck

$$F = c_{w_0} \frac{\rho}{2} V_0^2 \int_A \frac{c_w}{c_{w_0}} \frac{V^2}{V_0^2} dA,$$

worin das Integral über die ganze Projektionsfläche der Krone zu erstrecken ist. Als Bezugsgeschwindigkeit  $V_0$  wählt man vorteilhaft die Windgeschwindigkeit an der unteren Grenze der Krone (s. Abb. 12). Für den Bezugsbeiwert  $c_{w_0}$  ist dann der dieser Geschwindigkeit entsprechende Wert nach Abb. 11 zu wählen. Der Ausdruck für die Windkraft lässt sich schliesslich schreiben

$$(5) \quad F = c_{w_0} q_0 A_R,$$

wo  $q_0$  den der Geschwindigkeit  $V_0$  entsprechenden Staudruck (4) und

$$(6) \quad A_R = \int_A \frac{c_w}{c_{w_0}} \frac{V^2}{V_0^2} dA$$

die *reduzierte Windfläche* der Krone bezeichnet. Diese wird folgenderweise bestimmt: Die innere, ausgezogene Kurve in Abb. 12 a stelle die Kontur der Baumkronen-

projektion dar und die Kurve in Abb. 12 b die Windgeschwindigkeit an den verschiedenen Stellen der Krone an Hand der Kurven in Abb. 6. Jedem Geschwindigkeitswert ist nach Abb. 11 ein gewisser Wert des Widerstandsbeiwertes zugeordnet. Wenn nun in Abb. 12 a die Länge eines jeden Flächenstreifens  $dA$  mit dem dimensionslosen Faktor  $c_w V^2 / c_{w_0} V_0^2$  multipliziert und das Ergebnis als neue Streifenbreite abgetragen wird, gelangt man zu der in Abb. 12 a gestrichelt gezeichneten Kurve; die von dieser eingeschlossene Fläche stellt eben die reduzierte Windfläche (6) dar. Mit Hilfe dieser findet gleichzeitig sowohl die besondere Verteilung des Winddruckes auf der Kronenfläche als auch die Form der von der Krone gebildeten Windfläche Berücksichtigung. Es liegt auf der Hand, dass der Schwerpunkt der durch (6) definierten reduzierten Windfläche höher als derjenige der von der Baumkrone gebildeten Fläche selbst liegt.

Das Einführen der reduzierten Windfläche bringt zwei Vorteile mit sich. Erstens können wir nun beim Berechnen der Windkraft an jeder Stelle der Krone die gleiche Windgeschwindigkeit  $V_0$  oder, was (4) zufolge diesem gleichkommt, den gleichen Staudruck  $q_0$  in Rechnung bringen, wie ja aus der Formel (3) für  $F$  hervorgeht. Zweitens ersieht man aus Abb. 12 a, dass die beiden schrägen Seitenlinien der reduzierten Windfläche eine geringere Krümmung aufweisen als die Linienzüge der ursprünglichen Kronenkontur an den entsprechenden Stellen. Dies lässt den Gedanken aufkommen, die reduzierte Windfläche durch ein Trapez zu approximieren, wie dies in Abb. 13 gezeigt ist. Die Trapezhöhe  $k$  ist gleich der Höhe der Krone zu nehmen, und die schrägen Seiten sind derart zu ziehen, dass sie sich möglichst eng den Seitenlinien der reduzierten Windfläche anschmiegen.

Da die Form der Baumkronen in der Natur innerhalb sehr weiter Grenzen verschieden sein kann, ist es offensichtlich, dass die reduzierte Windfläche in zahlreichen Einzelfällen ganz beträchtlich von der Form des in Abb. 13 gezeigten Trapezes abweichen kann. Immerhin vertritt jedoch letzteres recht gut die reduzierte Windfläche der in der Natur am häufigsten vorkommenden Baumkronenform. Was den Einfluss der besagten Abweichungen anbetrifft, ist erstens zu beachten, dass bei einer solchen Wahl der reduzierten Windfläche, dass ihr Schwerpunkt in gleicher Höhe wie der Angriffspunkt der auf die Krone einwirkenden Windkraftresultante liegt, die Form der reduzierten Windfläche von keinerlei Einfluss auf die Schaftform des astfreien Abschnittes des Baumes ist. Die Form der reduzierten Windfläche macht sich nur in bezug auf die Form des innerhalb der Krone befindlichen Stammabschnittes fühlbar. Diese ihrerseits ist recht unempfindlich den Änderungen der reduzierten Windfläche gegenüber, da der Durchmesser des Stammes an jeder Stelle der Kubikwurzel des daselbst wirksamen Biegemoments verhältnismäßig ist. Diese Umstände haben zur Folge, dass die mit der trapezförmigen reduzierten Windfläche als Grundlage hergeleiteten Resultate bezüglich der Schaftform des Baumes in guter Übereinstimmung mit den Messergebnissen stehen.

Im Vorstehenden haben wir vorausgeschickt, dass bei einer bestimmten Baum-

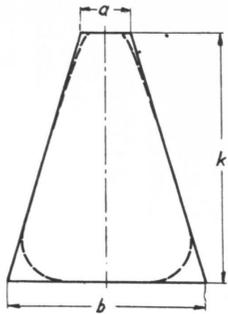


Abb. 13. Die Approximation der reduzierten Windfläche durch ein Trapez.

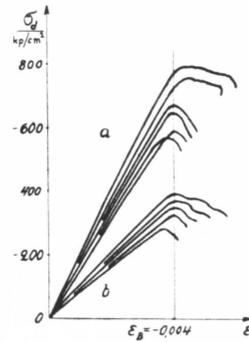


Abb. 14. Druckdiagramme von Kiefernholzproben mit verschiedenartigen Festigkeitseigenschaften.

art der Widerstandsbeiwert eine Funktion der Windgeschwindigkeit allein sei. Es ist indessen möglich, dass er ausserdem auch mit der Lage des Punktes in der Krone zusammenhängt, für den der Widerstandsbeiwert bestimmt werden soll. Es erscheint nämlich durchaus plausibel, dass z.B. der astarme und lichte obere Teil der Krone einen kleineren Widerstandsbeiwert besitzen kann als der dichte untere Teil. In gleicher Richtung wirkt auch die Durchbiegung der wenig robusten Krone in ihrer Gesamtheit in der Windrichtung bei starkem Winde. Zur näheren Ergründung dieser Faktoren hatte jedoch der Verfasser in Verbindung mit den oben beschriebenen Windkanalversuchen keine Gelegenheit. Mit Rücksicht auf dieses Unsicherheitsmoment wird man am besten das Trapezverhältnis  $a/b$  der reduzierten Windfläche als freien Parameter auffassen, dessen Wert zweckmässig so festzulegen ist, dass sich die berechnete Schaftform des Baumes möglichst gut den durch Messungen in der Natur gefundenen Schaftformen anschliesst. Nach den vom Verfasser ausgeführten Untersuchungen ist demnach zu wählen: für Kiefer  $a/b = 0,25$ , für Fichte und für Birke  $a/b = 0,1$ .

##### 5. Die Bruchhypothese des Holzes

Beim Herleiten der Gleichung (1) für die Meridiankurve einer an ihrem oberen Ende durch eine transversale Einzelkraft belasteten Säule gleicher Festigkeit gegen Biegung wurde beachtet, dass die Biegefestigkeit  $\sigma_{bB}$  des Holzes in der Längsrichtung des Stammes veränderlich sein kann. Da indessen zeitiger keinerlei zuverlässige Messergebnisse betreffs des Betrages von  $\sigma_{bB}$  an den verschiedenen Stellen des Stammes verfügbar waren, ist in den bisherigen Untersuchungen im allgemeinen

$\sigma_{bB}$  als konstant angenommen worden. Dies trifft jedoch in Wirklichkeit nicht zu, vielmehr nimmt bei sämtlichen Holzarten in der Regel die Biegefestigkeit vom Basalende des Stammes zur Krone ab. Durch Ausführen von Festigkeitsversuchen ist es möglich, eine Vorstellung von den Variationen von  $\sigma_{bB}$  in der Längsrichtung des Stammes zu erlangen und danach unter Heranziehung der gewonnenen Werte den Durchmesser des Stammes auf seinem astfreien Abschnitt an Hand der Formel (1) zu schätzen.

Der Umstand, dass  $\sigma_{bB}$  in der Längsrichtung des Baumstammes veränderlich ist, lässt den Zweifel aufkommen, ob es vom Standpunkt der Theoriebildung richtig ist, das Erreichen der Biegefestigkeit in den äusseren Fasern des Stammes als ausschlaggebend für den Bruch des Stammes anzusehen. Es taucht mit anderen Worten die Frage auf, ob nicht vielleicht ein anderes Charakteristikum vorhanden ist, das sich ebensogut zur Kennzeichnung der Brucherscheinung eignet wie die Biegefestigkeit oder überhaupt die Bruchspannung des Holzes, das aber in der Längsrichtung des Stammes konstant wäre oder jedenfalls kleinere Variationen aufwiese als die Biegefestigkeit. In den exakten Naturwissenschaften gilt ja letzterhand immer als Ziel, eben derartige Invarianten aufzusuchen. Bei der Brucherscheinung des Holzes ist eine solche Invariante in der Bruchzusammendrückung des Holzes zu finden. In Abb. 14 ist eine Anzahl Druck-Stauchungsdiagramme<sup>1</sup> wiedergegeben, die in der Prüfanstalt der VMT Flugzeugwerke beim Ausführen von Druckversuchen mit spätholzreichem Kiefernholz (a) und spätholzarmem Kiefernholz (b) erhalten wurden. Man sieht, dass in beiden Gruppen der Bruch praktisch genommen bei dem gleichen Wert der Zusammendrückung,  $\epsilon_B = -0,004$  eingetreten ist. Nach diesen Versuchen hat es den Anschein, dass die Bruchhypothese von DE SAINT VENANT, derzufolge der Bruch eines Materials im zusammengesetzten Spannungszustand von der grössten Dehnung bestimmt wird, auch für das inhomogene Holz im einachsigen Spannungszustand zutrifft. Dieses Ergebnis wird von JANKAS<sup>2</sup> Auffassung unterstützt, dass sich Elastizitätsmodul und Druckfestigkeit des Holzes bei einer Variation des Wassergehalts oder irgendeines anderen die Festigkeit des Holzes beeinflussenden Faktors in gleichem Verhältnis ändern. Ist dies nämlich der Fall, so folgt aus dem Hookeschen Gesetz

$$(7) \quad \sigma = E\epsilon$$

an der Bruchgrenze, dass die Bruchzusammendrückung  $\epsilon_B = \sigma_{bB}/E$  konstant ist.

Da es auf Grund des oben Dargestellten offensichtlich ist, dass die Bruchzusammendrückung des Holzes in der Längsrichtung des Baumstammes konstant oder jedenfalls in beträchtlich engeren Grenzen veränderlich ist als die Biegefestig-

<sup>1</sup> S. die Untersuchung des Verfassers in der Zeitschrift *Das Holz als Roh- und Werkstoff* 5 (1942), S. 299.

<sup>2</sup> G. JANKA, *Untersuchungen über die Elastizität und Festigkeit*. Mitt. d. forstl. Versuchsanstalt Österreichs, Wien 1900. . . 1904.

keit, werden wir im folgenden jene als Kriterium für den Bruch des Baumstammes aufstellen. Der Inhalt der mechanischen Schaftformtheorie von METZGER kann nun wie folgt ausgedrückt werden: *Der Stamm der in der Natur wachsenden Bäume nimmt eine derartige Gestalt an, dass die Bruchzusammendrückung der äussersten Fasern des Stammes in seiner Längsrichtung konstant ist.* Nach obigem hat der auf diese Weise definierte Stamm zugleich gleichmässige Festigkeit in bezug auf Biegung.

#### 6. Die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls in der Längsrichtung des Stammes

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls für Kiefer, Fichte und Birke hat der Verfasser im Sommer 1950 Messungen im Walde des Gutes Äijälä in Pirkkala ausgeführt.<sup>1</sup> Die Versuche wurden in der Weise vorgenommen, dass der als Versuchsobjekt gewählte Baum gefällt, abgeästet und in waagerechter Lage derart an seinem Basalende starr eingespannt wurde, dass der Stamm einen Kragbalken darstellte. An geeigneten Messpunkten wurde die Rinde entfernt und jeweils ein HUGGENBERGERScher Dehnungsmesser angebracht. Da grünes Holz sehr weich ist, war es zwecks Erhalts zuverlässiger Messergebnisse notwendig, an den Auflagestellen der Messschneiden kleine Messingnägel einzuschlagen. Die Messstrecke betrug 20 mm. In geeigneter Entfernung  $s$  von der Messstelle wurde ein Gewicht  $G$  angehängt, das im Messpunkt das Biegemoment  $M = Gs$  hervorrief. Nach Messung der Stammdicke  $d$  an der Messstelle konnte das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche,  $W = \pi d^3/32$ , und danach die Biegespannung aus der Formel

$$(8) \quad \sigma_b = \frac{M}{W}$$

berechnet werden. Falls der Stammquerschnitt an der Messstelle unrund war, wurde die Biegespannung nach den für eine elliptische Querschnittsfläche gültigen Formeln der Festigkeitslehre berechnet. Das Biegemoment wurde stets so klein gewählt, dass die Biegespannung  $\sigma_b < 50 \text{ kp/cm}^2$  war, um nicht die Proportionalitätsgrenze des Holzes zu überschreiten. Nachdem die Biegespannung  $\sigma_b$  berechnet und die vom Tensometer gemessene Dehnung  $\epsilon$  an der Instrumentskala abgelesen war, wurde der Elastizitätsmodul aus der Formel (7) in der Gestalt  $E = \sigma_b/\epsilon$  erhalten. Beim Ablesen des Tensometers wurde dessen Korrektionsfaktor berücksichtigt.<sup>2</sup> Abb. 15 zeigt den Versuch zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei der Birke. In der Abbildung ist die Art der Einspannung des Stammes sowie die

<sup>1</sup> Die bei den Messungen benutzten Versuchsstämme wurden dem Verfasser von Landwirt LASSE SILLANPÄÄ zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm meinen besten Dank aussprechen will.

<sup>2</sup> Bei den Versuchen kam der HUGGENBERGERSche Dehnungsmesser Nr. 850 mit dem Übersetzungsverhältnis 1187 zur Anwendung.

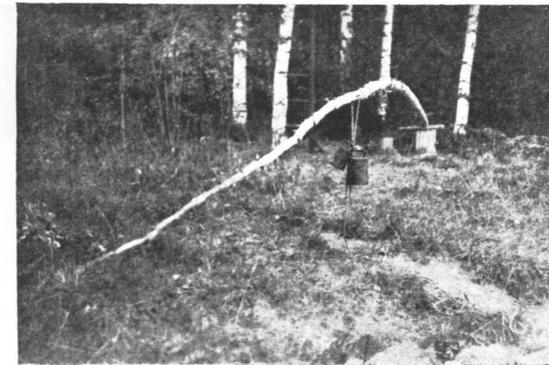


Abb. 15. Versuch zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei einer Birke.

zum Durchbiegen benötigten Gewichte zu sehen. Der Dehnungsmesser ist am höchsten Punkt des vom Stamme gebildeten Bogens schwach erkennbar.

Die zu den Versuchen verwendete Kiefer war auf Boden vom OM-Typus gewachsen. Das Alter des Baumes betrug 44 Jahre, sein Durchmesser in Brusthöhe 16 cm, die Länge 1445 cm und diejenige der grünen Krone 695 cm. Die Fichte hatte ein Alter von 19 Jahren, ein Durchmesser in Brusthöhe von 11 cm, eine Länge von 980 cm und eine grüne Krone in der Länge von 960 cm. Die Birke war 23 Jahre alt, und ihr Durchmesser in Brusthöhe betrug 14 cm, ihre Länge 1375 cm und die Länge ihrer grünen Krone 1035 cm.

In Abb. 16. . . 18 sind die aus den Messungen hervorgegangenen Werte des

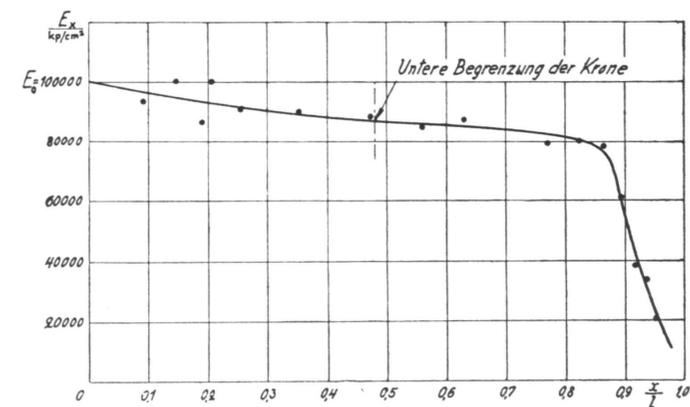


Abb. 16. Der Elastizitätsmodul einer wachsenden Kiefer an verschiedenen Stellen des Stammes.

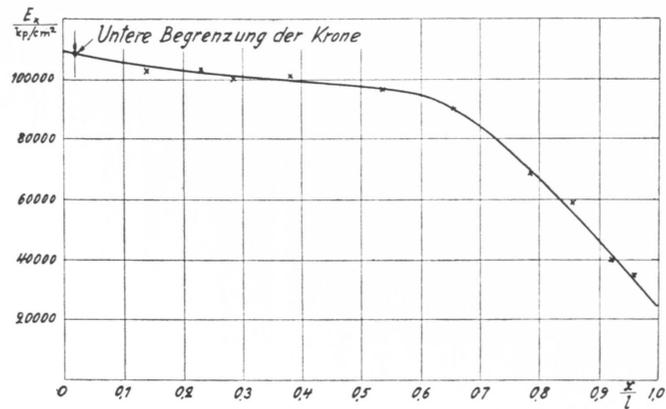


Abb. 17. Der Elastizitätsmodul einer wachsenden Fichte an verschiedenen Stellen des Stammes.

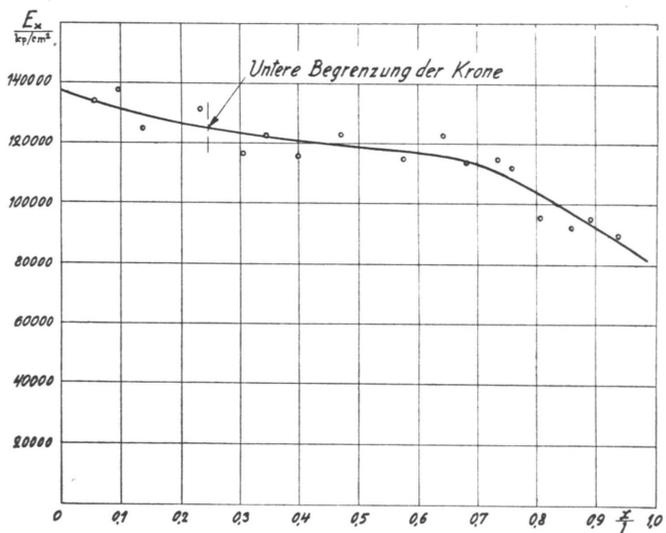


Abb. 18. Der Elastizitätsmodul einer wachsenden Birke an verschiedenen Stellen des Stammes.

Elastizitätsmoduls als Punkte in einem Koordinatensystem mit dem Abstand  $x$  des Messpunktes vom Basalende des Baumes, durch die Baumlänge  $l$  dividiert, als Abszisse eingetragen. Da der Wert des Elastizitätsmoduls mit der Entfernung vom Basalende veränderlich ist, ist er mit Rücksicht auf die spätere Anwendung mit  $E_x$  bezeichnet worden. Die Versuchsergebnisse sind durch Einzeichnen einer

stetigen, nach dem Augenmass sich den Versuchspunkten gut anschliessenden Kurve graphisch ausgeglichen. Die Ausführung der Messungen ganz nahe am Basalende war nicht möglich, weil die starre Einspannung des schweren Stammes am Basalende auf einer hinreichend kurzen Strecke nicht ausführbar war. Ebenfalls musste die Bestimmung des Elastizitätsmoduls für den äussersten Kronenabschnitt der Bäume unterbleiben, da der verhältnismässig schwere Dehnungsmesser nicht an dem schwachen Gipfel angebracht werden konnte. Da jede Baumart nur von einem einzigen Stamm vertreten ist, können die erzielten Resultate selbstverständlich nicht ohne weiteres als zuverlässig repräsentativ für die betreffende Baumart angesprochen werden. Besonders wünschenswert wäre es gewesen, den Einfluss der relativen Kronenlänge auf den Elastizitätsmodul untersuchen zu können. Immerhin dürfte man auf Grund der vorliegenden Ergebnisse sagen können, dass der Elastizitätsmodul bei Kiefer, Fichte und Birke vom Basalende zur Krone hin abnimmt, und zwar langsamer im Basalabschnitt und in der Mittelpartie des Stammes, und rascher in der Kronenpartie. Dieses Ergebnis gewinnt Unterstützung durch den Umstand, dass bei diesen drei Baumarten die Rohwichte ebenfalls vom Basalende zur Krone hin abnimmt, und einer niedrigeren Rohwichte entspricht ja bekanntlich ein niedrigerer Wert des Elastizitätsmoduls.<sup>1</sup>

Es liegt noch Grund vor, zu bemerken, dass aus der Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls in der Längsrichtung des Stammes auf Grund des Hookeschen Gesetzes (7) folgt, dass sich auch die Biegefestigkeit des Holzes längs des Stammes im gleichen Verhältnis ändert.

#### 7. Die Grundgleichungen der mechanischen Schaftformtheorie<sup>2</sup>

Wir betrachten einen lotrechten Baumstamm, der sowohl vom Winddruck als vom Eigengewicht des Baumes belastet wird. Dazu wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schnitt der Achsenlinie des Stammes mit der Erdoberfläche liegt und dessen  $x$ -Achse mit der Achsenlinie des Stammes im unbelasteten Zustand zusammenfällt (Abb. 19). Die Ausbiegung des Stammes in seitlicher Richtung sei mit  $v$  bezeichnet.

Wird das Gewicht des Baumes je Längeneinheit im Punkt  $x$  mit  $g$  bezeichnet, so beträgt das Gewicht des Baumabschnittes oberhalb des Schnittes  $x$

$$(9) \quad G_x = - \int_x^l g \, d\xi.$$

<sup>1</sup> S. Z.B. MATTI JALAVA, *Suomalaisen männyn, kuusen, koivun ja haavan lujuusominaisuuksista* (Strength Properties of Finnish Pine, Spruce, Birch and Aspen). Metsätieteellisen tutkimuslaitoksen julkaisuja 33.3 Helsinki 1945.

<sup>2</sup> Die Untersuchung hat vom mathematischen Standpunkt Herr Prof., Dr.phil. PENTTI LAASONEN durchgesehen, wofür mir gestattet sei meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

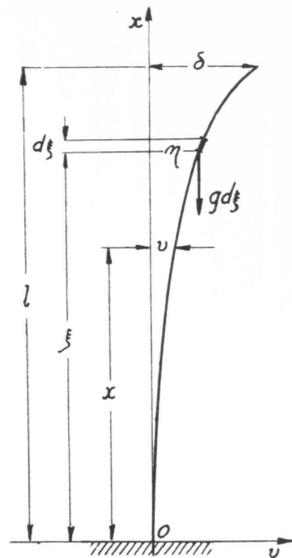


Abb. 19.

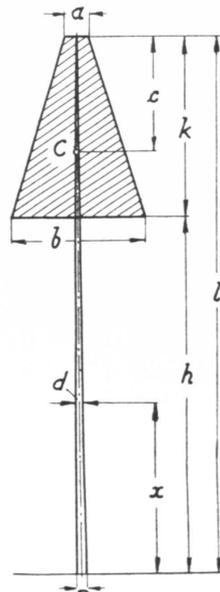


Abb. 20.

Das Gewicht ist als negative Grösse angesetzt worden, da es eine Druckkraft darstellt. Das Biegemoment im Schnitt  $x$  ist

$$(10) \quad M_x = M_W + M_G,$$

wo  $M_W$  das vom Wind bewirkte und  $M_G$  das aus dem Eigengewicht des Baumes erwachsende Biegemoment bezeichnet. Die Bestimmung von  $M_W$  soll im folgenden Abschnitt näher besprochen werden. Mit den Bezeichnungen der Abb. 19 ist<sup>1</sup>

$$(11) \quad M_G = - \int_x^l \bar{g} (\eta - v) d\xi.$$

Dieses Moment ist mit negativem Vorzeichen angesetzt worden, da es eine derartige Durchbiegung des Stammes herbeizuführen sucht, dass dessen konkave Seite der positiven Richtung der  $v$ -Achse zugewandt ist.

<sup>1</sup> Die Stabilität des Baumes unter der Wirkung seines Eigengewichts hat A. G. GREENHILL untersucht. S. *Cambr. Phil. Soc. Proc.* IV (1881), S. 65. S. auch R. GRAN OLSSON, *Holz als Roh- und Werkstoff* 5 (1942), S. 297, Cf. W. WALTON, *Quart. Journ. of Math.* IX (1868), S. 179... 184 und L. J. HENDERSON, *Proc. Amer. Acad. Sci.* II (1916), S. 654... 658.

Die grösste Randspannung im Stammquerschnitt im Abstand  $x$  vom Ursprung beträgt

$$(12) \quad \sigma_x = \frac{G_x}{A_x} + \frac{M_x}{I_x} \frac{d}{2}.$$

Hier bezeichnet  $A_x$  den Flächeninhalt des Querschnittes  $x$  und  $I_x$  dessen Trägheitsmoment. Wenn in dieser Gleichung der Ausdruck für  $G_x$  aus (9) und für  $M_x$  aus (10) eingesetzt sowie berücksichtigt wird, dass dem Hookeschen Gesetz (7) zufolge die Zusammendrückung  $\varepsilon = \sigma_x/E_x$  ist, erhält man

$$(13) \quad \varepsilon = - \frac{1}{A_x E_x} \int_x^l g d\xi + \frac{d}{2 I_x E_x} \left[ M_W - \int_x^l g (\eta - v) d\xi \right].$$

Betrachtet man die Zusammendrückung  $\varepsilon$  als konstant, so besagt diese Gleichung, dass der Baumstamm gleichmässig stark gegen den vom Eigengewicht (9) des Baumes bewirkten Druck und die vom Biegemoment (10) hervorgerufene Biegung ist.

Die Gleichung (13) allein ist nicht hinreichend zur Bestimmung des Stammdurchmessers  $d$ , da darin als zweite Unbekannte die Durchbiegung  $v$  des Stammes eingeht. Zur Berechnung desselben nehmen wir den Ausdruck für die Krümmung der elastischen Linie des Stammes

$$(14) \quad \frac{1}{R} = - \frac{M_x}{E_x I_x}$$

zum Ausgangspunkt. Hier bezeichnet  $R$  den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie. Andererseits ist bekanntlich

$$(15) \quad \frac{1}{R} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}},$$

wo  $v' = dv/dx$  ist. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke für die Krümmung ergibt sich für die elastische Linie des Stammes die Differentialgleichung

$$(16) \quad \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = - \frac{M_x}{E_x I_x}$$

oder

$$(17) \quad E_x I_x \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = - M_W + \int_x^l g (\eta - v) d\xi,$$

wenn die Gleichungen (10) und (11) berücksichtigt werden.

Die simultanen Gleichungen (13) und (17) im Verein bestimmen vollends den

Durchmesser und die Durchbiegung bei einem Stamm gleicher Festigkeit gegen die mechanischen Beanspruchungen. Wir nennen daher diese Gleichungen die Grundgleichungen der mechanischen Schaftformtheorie.

### 8. Der zweite Näherungswert des absoluten und des relativen Stammdurchmessers

Die exakte mathematische Lösung des von den Grundgleichungen (13) und (17) der mechanischen Schaftformtheorie gebildeten Systems stellt eine komplizierte und schwierige Aufgabe dar. Wir müssen uns daher nur mit einer annähernden Lösung desselben begnügen. Zuvor wollen wir jedoch eine Vereinfachung vornehmen. Mittels einfacher numerischer Schätzungen stellt man mit Leichtigkeit fest, dass das erste Integralglied rechts in Gleichung (13), das die vom Eigengewicht des Baumes herrührende Zusammendrückung darstellt, z.B. in Brusthöhe bei einer Kiefer von 20 cm Durchmesser der Grössenordnung  $-0,000015$  ist. Das zweite Glied in eckigen Klammern rechts in der selben Gleichung, das die vom Biegemoment bewirkte Zusammendrückung angibt, beträgt bei mittleren Windstärken vielleicht die Hälfte der Bruchzusammendrückung beim Kiefernholz und liegt demnach in der Grössenordnung  $-0,002$ . Wir stellen also fest, dass das erste Glied rechts in Gleichung (13) als unbedeutend gegenüber dem zweiten Glied vernachlässigt werden kann.

Bei einer näheren Betrachtung des Integralgliedes rechts in der Differentialgleichung (17) für die elastische Linie des Stammes, welches laut (11) das vom Eigengewicht des Baumes herrührende Biegemoment darstellt, findet man, dass dieses stets verhältnismässig gering — im Durchschnitt etwa  $1/4$  — im Vergleich mit dem vom Wind hervorgebrachten Biegemoment  $M_W$  ist. Gleiches gilt in bezug auf die Formel (13) für den Stammdurchmesser, wo die gleichen Glieder rechts in eckigen Klammern vorkommen. Diese Beobachtung legt den Gedanken nahe, dass die Lösung der Gleichungen (13) und (17) am besten auf iterativem Wege erfolgen könnte. Durch Einsetzen des Ausdruckes  $I_x = \pi d^4/64$  für das Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnitts in den Gleichungen (13) und (17) sowie Weglassen des ersten Gliedes rechts in Gleichung (13) mit der oben dargestellten Begründung lassen sich diese Gleichungen in folgende, für die Iteration geeignete Form bringen:

$$(18 a) \quad \left[ \quad d^3 = \frac{32}{\pi \varepsilon E_x} \left[ M_W - \int_x^l g(\eta - v) d\xi \right], \right.$$

$$(18 b) \quad \left[ \quad \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = -\frac{64}{\pi d^4 E_x} \left[ M_W - \int_x^l g(\eta - v) d\xi \right]. \right.$$

Für die Iteration wählen wir nun zum ersten Näherungswert des Stammdurchmessers  $d_1 = \infty$  und zu demjenigen der Durchbiegung  $v_1 = 0$ , wobei auch  $\eta_1 = 0$

ist. Setzt man diese Werte rechts in den Gleichungen (18) ein und berücksichtigt man ferner, dass  $g \sim d^2$  und  $v \sim 1/d^4$  ist, womit die Integralglieder in den eckigen Klammern in beiden Gleichungen bei dem Übergang zur Grenze  $d \rightarrow \infty$  verschwinden, so ergibt sich

$$(19 a) \quad \left[ \quad d_2^3 = \frac{32}{\pi \varepsilon E_x} M_W, \right.$$

$$(19 b) \quad \left[ \quad v_2 = 0. \right.$$

Die Anwendung der Formel (19 a) hat zur Voraussetzung, dass das vom Wind herbeigeführte Biegemoment  $M_W$  in jedem Punkt längs des Stammes bekannt ist. Da der Ausdruck für das Biegemoment von verschiedener Gestalt auf dem astfreien Abschnitt des Stammes einerseits und auf dem Kronenabschnitt andererseits ist, zerfällt die Bestimmung des Stammdurchmessers fortan in zwei separate Teile. Zuerst werden wir uns mit der Berechnung des Durchmessers des astfreien Stammabschnitts befassen.

*Der Durchmesser des astfreien Stammabschnitts.* Der Betrag des vom Wind hervorgerufenen Biegemoments in einem beliebigen Schnitt des Stammes wird zum Teil von der in der grünen Krone des Baumes aufkommenden Windkraft und zum Teil von dem auf den Stamm selbst einwirkenden Winddruck bedingt. Die Projektionsfläche des Stammabschnitts innerhalb der grünen Krone können wir als in der reduzierten Windfläche der Krone inbegriffen betrachten, womit sich eine gesonderte Berücksichtigung dieses Stammabschnitts erübrigt.

In Abb. 20 stellt die schraffierte Fläche die reduzierte Windfläche  $A_R$  der Krone nach Abb. 13 dar. Wenn es sich um die Bestimmung des Biegemoments in einem Schnitt auf dem astfreien Abschnitt des Stammes mit dem Abstand  $x$  vom Wurzelende des Stammes handelt, kann die auf die Fläche  $A_R$  einwirkende Windkraft durch eine im Schwerpunkt  $C$  der besagten Fläche angreifende resultierende Kraft (5) ersetzt werden. Bezeichnet man den Abstand des Schwerpunktes vom oberen Stammende mit  $c$ , so beträgt das Biegemoment der auf die Krone einwirkenden Windkraft in bezug auf den Querschnitt  $x$   $M_K = -c_{w_0} q_0 A_R (l - c - x)$ . Wird hier laut der Schwerpunktsregel für das Trapez  $c = k(a + 2b)/3(a + b)$  eingesetzt sowie beachtet, dass die Fläche des Trapezes  $A_R = k(a + b)/2$  ist, so kann der Ausdruck des Biegemoments in folgende Form gebracht werden:

$$(20) \quad M_K = -\frac{1}{2} c_{w_0} q_0 k (a + b) \left( l - \frac{k}{3} \frac{a + 2b}{a + b} - x \right).$$

Das Biegemoment ist mit negativem Vorzeichen angeschrieben worden, weil es eine derartige Biegung des Stammes hervorzubringen sucht, dass dessen konkave Seite der positiven Richtung der  $v$ -Achse in dem nach Abb. 19 gewählten Koordinatensystem zugewandt ist.

Die auf den Stammabschnitt zwischen dem Schnitt  $x$  und der unteren Be-

grenzung der Krone einwirkende Windkraft berücksichtigen wir näherungsweise derart, dass wir den besagten Abschnitt als Kreiszyylinder mit dem Durchmesser  $d$  ansehen. Mit der Bezeichnung  $c'_w$  für den Widerstandsbeiwert des Zylinders erhält man für den Betrag des vom Winddruck auf den Stamm hervorgerufenen Biegemoments:

$$(21) \quad M_S = -\frac{1}{2} c'_w q_0 d (h-x)^2.$$

Auch dieses Moment ist negativ angeschrieben worden, und zwar aus dem in Verbindung mit Gleichung (20) dargelegten Grunde.

Der Ausdruck von  $M_S$  in (21) ist selbstredend nicht völlig einwandfrei, da sich der Stamm in Wirklichkeit beim Aufwärtsschreiten verjüngt. Die Anwendung eines solchen Näherungsausdruckes kann jedoch gut verteidigt werden, da das von ihm vertretene Biegemoment bei Bäumen mit kleiner Krone im Wurzelschnitt  $x=0$ , wo es seinen grössten Wert hat, nur etwa  $1/5$  des Biegemoments  $M_K$  ausmacht (s. z.B. Abb. 21).  $M_S$  kann somit als Korrektionsglied für den Hauptteil (20) des Biegemoments aufgefasst werden, wobei ein geringer darin begangener Fehler keinen nennenswerten Einfluss auf die Endergebnisse ausübt.

Wenn die Biegemomentausdrücke (20) und (21) addiert werden, erhält man für das vom Wind hervorgerufene Biegemoment im Schnitt  $x$  den Ausdruck

$$(22) \quad M_W = -\frac{1}{2} c_{w0} q_0 k (a+b) \left( l - \frac{k}{3} \frac{a+2b}{a+b} - x \right) - \frac{1}{2} c'_w q_0 d (h-x)^2 \quad x < h.$$

Dieser Ausdruck ist nur auf dem astfreien Stammabschnitt  $x < h$  gültig.

Durch Einsetzen des Ausdruckes für  $M_W$  nach (22) in der Formel (19 a) gewinnt man zur Bestimmung des zweiten Näherungswertes des Stammdurchmessers im astfreien Stammabschnitt die Gleichung dritten Grades

$$(23) \quad d_2^3 = -\frac{32}{\pi \varepsilon E_x} \left[ \frac{1}{2} c_{w0} q_0 k (a+b) \left( l - \frac{k}{3} \frac{a+2b}{a+b} - x \right) + \frac{1}{2} c'_w q_0 d_2 (h-x)^2 \right].$$

Eine Untersuchung der Diskriminante dieser Gleichung zeigt, dass dieselbe stets positiv ist. Die Gleichung hat demnach zwei konjugiert komplexe Wurzeln sowie eine reelle Wurzel, welche eben den Stammdurchmesser darstellt. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{16 c'_w q_0}{\pi \varepsilon E_x} (h-x)^2, \\ s = \frac{16 c_{w0} q_0 b k l}{\pi \varepsilon E_x} \left( 1 + \frac{a}{b} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{k}{l} \frac{a+2b}{a+b} - \frac{x}{l} \right) \end{array} \right\} \quad x < h.$$

lässt sich der zweite Näherungswert für den Durchmesser des astfreien Stammabschnitts aus der Formel

$$(25) \quad d_2 = \sqrt[3]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{r^3}{27}}}$$

berechnen.

Beim näheren Betrachten der Grössenverhältnisse der Glieder unter dem Quadratwurzelzeichen untereinander findet man, dass  $r^3/27$  stets sehr klein gegen  $s^2/4$  ist. Wenn aus diesem Grunde die Wurzeln nach dem Binomialsatz in konvergente Potenzreihen entwickelt und in der endgültigen Entwicklung nur die zwei ersten Glieder berücksichtigt werden, ergibt sich für den Stammdurchmesser die praktische Näherungsformel

$$(26) \quad d_2 \approx \sqrt[3]{-s} - \frac{1}{3} \frac{r}{\sqrt{-s}} = d_K - \frac{16 c'_w q_0}{3 \pi \varepsilon E_x} \frac{(h-x)^2}{d_K} \quad x < h.$$

Hierin bedeutet

$$(27) \quad d_K = \sqrt[3]{-s}$$

den Stammdurchmesser, wenn von den auf den Baum einwirkenden Kräften nur der Winddruck auf die Krone berücksichtigt wird. Der Fehler der Formel (26) bei einem Baum normalen Proportionen ist  $< 0,3\%$ . Beim Benutzen der Formeln (24...27) ist zu beachten, dass  $r$  und  $s$  negative Grössen sind, da die Zusammenrückung  $\varepsilon$  negativ ist.

Die Formeln (25) und (26) liefern uns den zweiten Näherungswert für den absoluten Durchmesser des astfreien Stammabschnitts. Um die Schaftform, d.h. den relativen Stammdurchmesser bestimmen zu können, müssen wir irgendeinen geeigneten Stammdurchmesser als Bezugsmass festlegen. Am besten eignet sich hierzu der Wurzeldurchmesser  $D$  des Stammes, für dessen zweiten Näherungswert wir die Bezeichnung  $D_2$  einführen. Zur Bestimmung desselben kann entweder die Formel (25) oder (26) dienen, worin die dem Wert  $x=0$  zugeordneten Werte der Grössen  $r$ ,  $s$  und  $d_K$  aus den Formeln (24) und (27) einzusetzen sind. Durch beiderseitige Division der Gleichung (25) oder (26) mit  $D_2$  würde sich eine Formel für den zweiten Näherungswert des relativen Stammdurchmessers im astfreien Abschnitt ergeben. Wir schreiben jedoch diese Formeln nicht aus, da sie von den Formeln (25) bzw. (26) nur um den Faktor  $1/D_2$  verschieden sind.

In den Abbildungen 21, 22 und 23 sind an Hand der Formeln (21) und (22) die Biegemomente  $M_S$  und  $M_K$  bei einer 10 m hohen Kiefer dargestellt, wenn die relative Länge der grünen Krone  $k/l = 0,2, 0,4$  bzw.  $0,6$  ist. Für die in den Formeln vorkommenden Grössen sind bei dieser Berechnung die in Tabelle 1 angeführten Zahlenwerte benutzt worden. Als Windgeschwindigkeit an der unteren Begrenzung der grünen Krone wurde  $V_0 = 10$  m/s gewählt. Nach Abb. 6 ist dann die Windgeschwindigkeit in Höhe des Baumwipfels etwa 25 m/s. Die graphische

Tabelle 1

Grösse	Bez.	Kiefer	Fichte	Birke
Windgeschwindigkeit m/s .....	$V_0$	10	10	10
Widerstandsbeiwert der Krone .....	$c_{w0}$	0,475	0,495	0,19
Widerstandsbeiwert des Stammes .....	$c_w$	1	1	1
Zusammendrückung des Holzes .....	$\varepsilon$	-0,002	-0,002	-0,002
Trapezverhältnis der reduzierten Windfläche	$a/b$	0,25	0,10	0,10

Darstellung des Biegemoments  $M_S$  ähnelt einer Parabel und diejenige von  $M_K$  ist eine Gerade, welche die Achse des Stammes im Schwerpunkt  $C$  der reduzierten Fläche der Krone trifft. In den Abbildungen sind zugleich die absoluten Stammdurchmesser  $d_K$  und  $d_2$  nach den Formeln (27) und (26) eingetragen. Von diesen entspricht  $d_K$  dem von der Krone hervorgerufenen Biegemoment  $M_K$ . Die grössten Abweichungen zwischen den Durchmessern  $d_K$  und  $d_2$  ergeben sich bei Bäumen mit kleiner Krone, die das grösste Verhältnis  $M_S/M_W$  aufweisen. Beim Berechnen

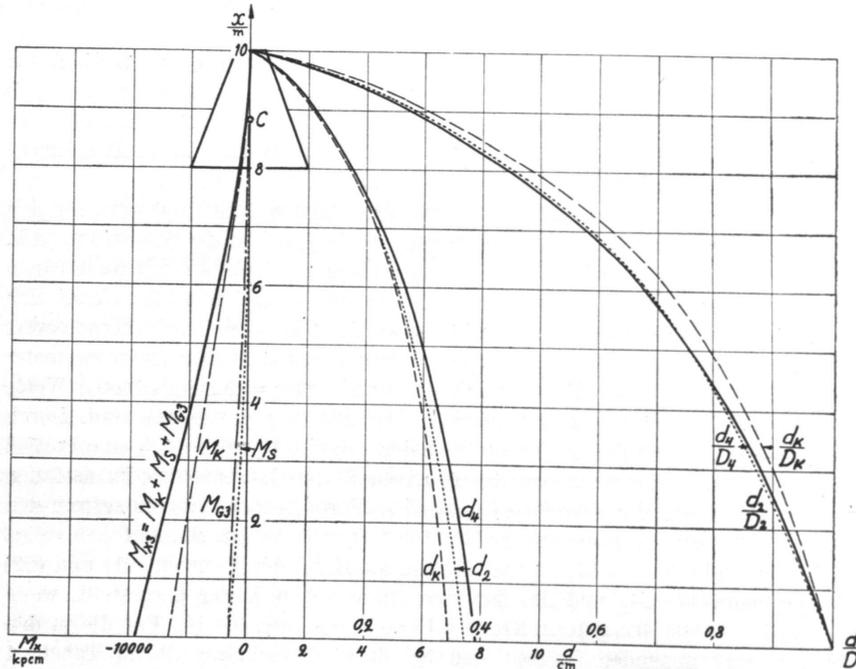


Abb. 21. Die Biegemomente  $M_K$ ,  $M_S$  und  $M_G$ , die absoluten Stammdurchmesser  $d_K$ ,  $d_2$  und  $d_4$  sowie die relativen Stammdurchmesser  $d_K/D_K$ ,  $d_2/D_2$  und  $d_4/D_4$  bei der Kiefer, bei  $l = 10$  m,  $k/l = 0,2$ ,  $\varepsilon = -0,002$  und  $V_0 = 10$  m/s.

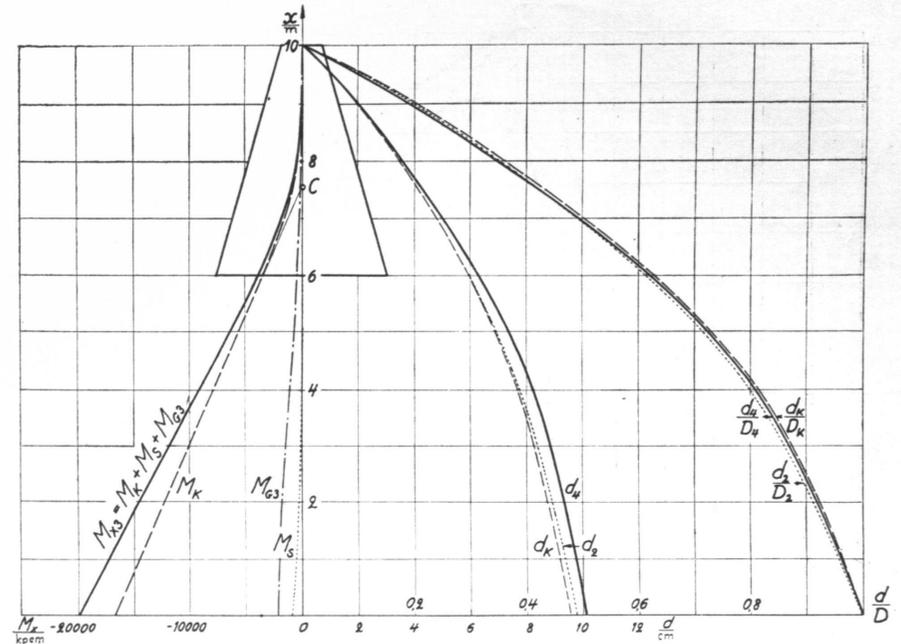


Abb. 22. Die Biegemomente  $M_K$ ,  $M_S$  und  $M_G$ , die absoluten Stammdurchmesser  $d_K$ ,  $d_2$  und  $d_4$  sowie die relativen Stammdurchmesser  $d_K/D_K$ ,  $d_2/D_2$  und  $d_4/D_4$  bei der Kiefer, bei  $l = 10$  m,  $k/l = 0,4$ ,  $\varepsilon = -0,002$  und  $V_0 = 10$  m/s.

des absoluten Stammdurchmessers wurde vorausgesetzt, dass die in den äussersten Fasern auf der konkaven Seite des Stammes eintretende Zusammendrückung  $\varepsilon = -0,002$ , d.h. die Hälfte der Bruchzusammendrückung  $\varepsilon_B = -0,004$  beträgt. In den Abbildungen sind fernerhin die relativen Stammdurchmesser  $d_K/D_K$  und  $d_2/D_2$  eingezeichnet worden.

Auf gleiche Weise werden die Biegemomente und die Stammdurchmesser für Fichte und Birke bestimmt. Bei den Beanspruchungen im Stamm der Birke spielt  $M_S$  dem Biegemoment  $M_K$  gegenüber eine verhältnismässig grössere Rolle als bei der Kiefer und Fichte, da die Birke einen grösseren Wert des Verhältnisses  $c_w/c_{w0}$  als die beiden anderen Baumarten aufweist.

Der Durchmesser des Stammabschnitts in der Krone. Wir betrachten die Abb. 24, nach welcher der Stammquerschnitt im Abstand  $x$  von der Erdoberfläche in die Baumkrone fällt. Wenn die reduzierte Windfläche vom Wind getroffen wird, hat die schraffierte, oberhalb  $x$  gelegene Fläche in bezug auf den Schnitt das Biegemoment

9. Der dritte Näherungswert der Stammdurchbiegung

Wenn die zweiten Näherungswerte (19) des Stammdurchmessers und der Durchbiegung rechts in den Gleichungen (18) eingesetzt werden, erhält man zur Bestimmung des dritten Näherungswertes des Stammdurchmessers und der Durchbiegung die Gleichungen

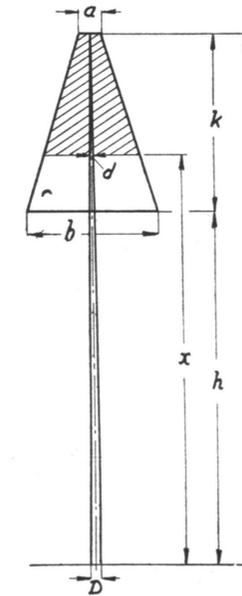


Abb. 24.

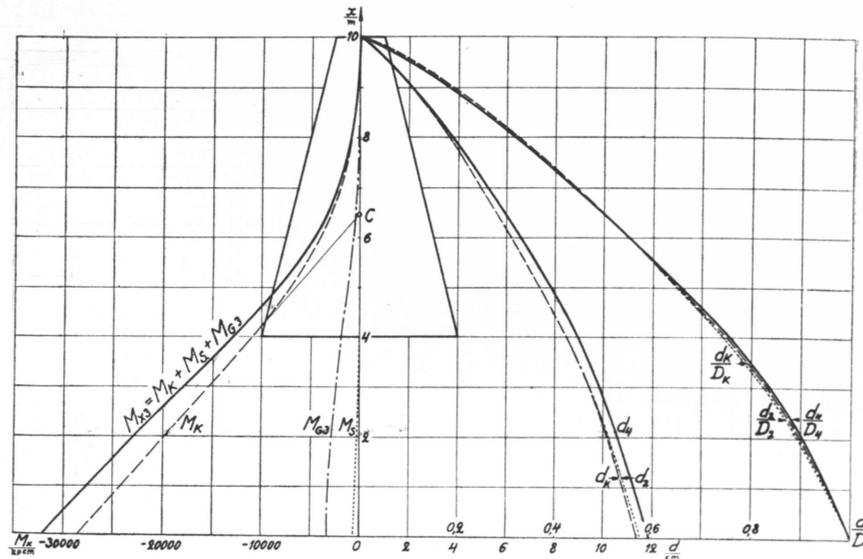


Abb. 23. Die Biegemomente  $M_K$ ,  $M_S$  und  $M_G$ , die absoluten Stammdurchmesser  $d_K$ ,  $d_2$  und  $d_4$ , sowie die relativen Stammdurchmesser  $d_K/D_K$ ,  $d_2/D_2$  und  $d_4/D_4$  bei der Kiefer, bei  $l = 10$  m,  $k/l = 0,6$ ,  $\varepsilon = -0,002$  und  $V_0 = 10$  m/s.

$$(28) \quad M_W = -\frac{c_{w0} q_0 b k^2}{6} \left(\frac{l-x}{k}\right)^2 \left[1 + 2\frac{a}{b} - \frac{x-h}{k} \left(1 - \frac{a}{b}\right)\right] \quad x > h.$$

Wenn  $x = h$  ist, geht dieser Ausdruck in denjenigen von  $M_W$  in Gleichung (20) über. Durch Einsetzen des Ausdruckes für  $M_W$  aus (28) in der Gleichung (19 a) erhält man für den Durchmesser des Stammabschnitts in der Krone den zweiten Näherungswert

$$(29) \quad d_2 = \sqrt[3]{-\frac{16 c_{w0} q_0 b k^2}{3 \pi \varepsilon E_x} \left(\frac{l-x}{k}\right)^2 \left[1 + 2\frac{a}{b} - \frac{x-h}{k} \left(1 - \frac{a}{b}\right)\right]} \quad x > h.$$

Bei  $x = h$  liefern die Formeln (29), (25), (26) und (27) den gleichen Wert des Stammdurchmessers.

In den Abbildungen 21, 22 und 23 ist nach der Formel (28) das Biegemoment der Krone einer 10 m hohen Kiefer dargestellt. In den gleichen Abbildungen ist auch der absolute Stammdurchmesser  $d_2$  nach Formel (29) eingezeichnet. Wenn der absolute Durchmesser mit dem Durchmesser am Wurzelende dividiert wird, erhält man die relativen Durchmesser  $d_K/D_K$  und  $d_2/D_2$ ; die diesen entsprechenden Kurven sind ebenfalls im Kronenabschnitt in den Abbildungen 21, 22 und 23 eingetragen.

$$(30 a) \quad \left\{ \begin{aligned} d_3^3 &= \frac{32}{\pi \varepsilon E_x} M_W = d_2^3, \\ (30 b) \quad \frac{v_3''}{(1 + v_3'^2)^{3/2}} &= -\frac{64}{\pi d_2^4 E_x} M_W. \end{aligned} \right.$$

Wir besprechen in diesem Zusammenhang nur die Berechnung der Durchbiegung des Stammes. Hierzu bringen wir die Differentialgleichung (30 b) auf Grund der Gleichung (15) in die Form

$$(31) \quad \frac{1}{R_3} = -\frac{64}{\pi d_2^4 E_x} M_W.$$

Hier bezeichnet  $R_3$  den dritten Näherungswert<sup>1</sup> für den Krümmungshalbmesser

<sup>1</sup> Für die beiden ersten Näherungswerte des Krümmungshalbmessers gilt  $R_1 = R_2 = \infty$ , da  $v_1 = v_2 = 0$  ist.

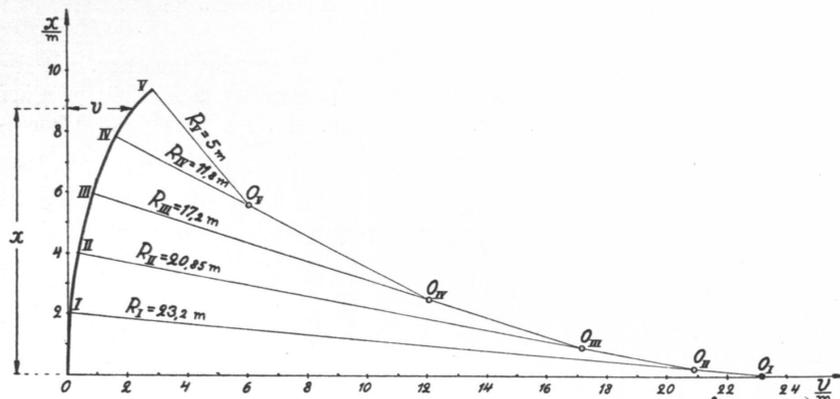


Abb. 25. Die angenäherte zeichnerische Konstruktion der elastischen Linie des Stammes für die in Abb. 22 wiedergegebene Kiefer unter Anwendung der Krümmungskreis-methode.

der elastischen Linie des Stammes im Abstand  $x$  vom Wurzelende. Durch Eliminieren von  $M_W$  aus den Gleichungen (30 a) und (31) findet man zur Berechnung des dritten Näherungswertes des Krümmungshalbmessers der elastischen Linie die praktische Formel

$$(32) \quad \frac{1}{R_3} = -\frac{2 \varepsilon d_3^3}{d_2^4} = -\frac{2 \varepsilon}{d_2}$$

Unter Anwendung der Krümmungskreis-Methode von Lord KELVIN<sup>1</sup> bietet sich mit dieser Gleichung ein sehr bequemes Verfahren zum annähernden Bestimmen der elastischen Linie des Stammes. Hierzu wird zuerst der Wert des Krümmungshalbmessers (32)  $R_3$  in geeignet gewählten Stammquerschnitten auf Grund der im vorstehenden Abschnitt bestimmten  $d_2$ -Werte berechnet. Hiernach wird die elastische Linie durch sukzessives Aneinanderreihen von Krümmungskreisbögen konstruiert, wie es Abb. 25 als Beispiel im Fall der Kiefer mit  $k/l = 0,4$  zeigt. Man beginnt mit dem Zeichnen am Wurzelende, wo die Randbedingungen  $v = 0$ ,  $dv/dx = 0$  bekannt sind. Je kürzer die Kreisbögen gewählt werden, desto besser schliesst sich üblicherweise die so erzielte angenäherte elastische Linie der Integralkurve der Differentialgleichung (30 b) an, unter der Voraussetzung, dass keine Zeichenungenauigkeiten aufkommen. Da diese indessen in der Praxis nie vollends vermieden werden können, ist es von Vorteil, die elastische Linie aus verhältnismässig wenigen, beispielsweise 5 gleichlangen Kreisbögen zusammensetzen. Dieses Vorgehen kann auch damit begründet werden, dass die Kenntnis der elastischen Linie des Stammes in diesem Zusammenhang nur zur Bestimmung des vom Eigengewicht des Baumes herrührenden Biegemoments (11),  $M_G$ , be-

<sup>1</sup> Lord KELVIN, *On Graphic Solution of Dynamical Problems*. Phil.Mag. V, 34 (1892), S. 443.

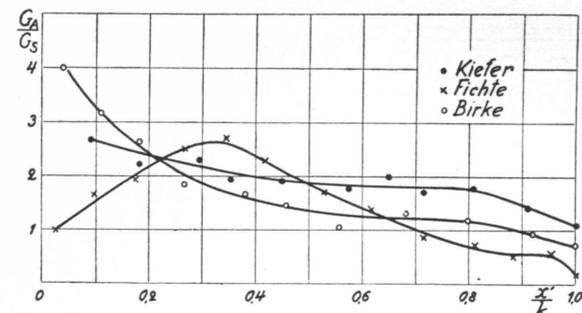


Abb. 26. Das Gewichtsverhältnis von Astwerk und Stamm an verschiedenen Stellen der Krone bei Kiefer, Fichte und Birke.

nötigt wird. Da dieses Moment im Vergleich mit  $M_W$  verhältnismässig klein ist — im Durchschnitt nur 1/4 des letzteren —, übt ein geringer Fehler in der Bestimmung der Durchbiegung keinen nennenswerten Einfluss auf das gesamte Biegemoment (10) aus, und noch geringer ist der Einfluss desselben auf den Stammdurchmesser, da dieser der Kubikwurzel aus dem Biegemoment verhältnismässig ist.

#### 10. Der dritte Näherungswert des vom Eigengewicht des Baumes herrührenden Biegemoments

Nachdem der dritte Näherungswert  $v_3$  der Durchbiegung des Stammes auf die im vorstehenden Abschnitt gezeigte Weise bestimmt ist, können wir den dritten Näherungswert für das vom Eigengewicht des Baumes herbeigeführte Biegemoment (11)  $M_G$  berechnen<sup>1</sup>. Auf dem astfreien Stammabschnitt ist das Gewicht des Stammes je Längeneinheit

$$(33) \quad g = \gamma \cdot \frac{\pi}{4} d_3^2.$$

Hier bezeichnet  $\gamma$  das spezifische Gewicht des grünen Holzes. Damit auch das Gewicht der Baumrinde annähernd Berücksichtigung finde, ist es angebracht, für Kiefer, Fichte und Birke  $\gamma = 0,001 \text{ kp/cm}^3$  zu nehmen.

Die Formel (33) kann auch zur Berechnung des Gewichts je Längeneinheit für den Kronenabschnitt benutzt werden, wenn man  $\gamma$  die Bedeutung des reduzierten spezifischen Gewichtes  $\gamma_r$  gibt, in welcher auch das Gewicht des Astwerks berücksichtigt ist. Das reduzierte spezifische Gewicht berechnet sich aus der Formel

$$(34) \quad \gamma_r = \gamma \left(1 + \frac{G_A}{G_S}\right),$$

<sup>1</sup> Für die beiden ersten Näherungswerte des vom Eigengewicht des Baumes herrührenden Biegemoments gilt  $M_{G_1} = M_{G_2} = 0$ , da  $v_1 = v_2 = 0$  ist.

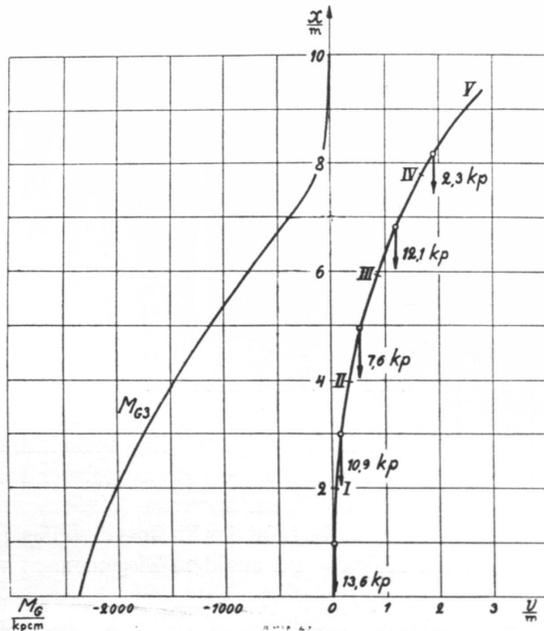


Abb. 27. Die angenäherte Bestimmung des vom Eigengewicht des Baumes herrührenden Biegemoments (11)  $M_G$ .

wo  $G_A$  das Gewicht des Astwerks und  $G_S$  das des Stammes bezeichnet. Zur Bestimmung des Verhältnisses  $G_A/G_S$  hat der Verfasser einige Messungen an Kiefer, Fichte und Birke angestellt. Die Stämme der frischgefallenen Bäume wurden an geeigneten Stellen zwischen den Ästen durchgesägt und abgeästet und die jedem Abschnitt angehörnden Äste sowie der Stammabschnitt selbst wurden gesondert gewogen. Das so erzielte Resultat ist in Abb. 26 in Abhängigkeit vom Quotienten  $x'/k$  dargestellt, wobei  $x'$  den Abstand vom Gipfel bezeichnet. Aus diesen Diagrammen geht hervor, dass das Verhältnis  $G_A/G_S$  recht stark mit dem Ort in der Krone variiert, und zwar in sehr verschiedener Weise bei den verschiedenen Baumarten.

Die Bestimmung des Biegemoments (11)  $M_G$  erfolgt nun am einfachsten, indem man die elastische Linie des Stammes auf die in Abb. 25 angedeutete Weise zeichnet, den Stamm in geeignete Abschnitte zerlegt, das Gewicht eines jeden Abschnittes unter Anwendung der Formeln (33, 34) sowie der Abb. 26 berechnet und dieses durch eine gleichgrosse, in seinem Schwerpunkt angreifende Kraft  $G$  ersetzt, wie dies in Abb. 27 für eine Kiefer mit  $k/l = 0,4$  gezeigt ist. Hiernach berechnet man den Wert des das Biegemoment  $M_G$  in (11) darstellenden Integrals annähernd in Tabellenform. Auf diese Weise gelangt man zu der in Abb. 27 eingezeichneten Momentkurve von S-Gestalt, welche den dritten Näherungswert  $M_{G3}$

für das vom Eigengewicht des Baumes herrührende Biegemoment darstellt. Dieser verschwindet am Gipfel und hat seinen grössten Wert am Wurzelende des Stammes. Es ist hervorzuheben, dass das auf obenbeschriebene Weise berechnete  $M_G$  einen Mindestwert des vom Eigengewicht des Baumes bewirkten Biegemoments darstellt. In Wirklichkeit kann  $M_G$  beträchtlich grösser sein, und zwar deshalb, weil das Astwerk des Baumes nass sein kann und weil es ferner durch Einwirkung des Windes eine noch grössere seitliche Ausladung erhält als die elastische Linie des Stammes an sich bedingt.

Wir sind nunmehr in der Lage, die Darstellung in Abb. 22 durch Hinzufügen der Momentkurve  $M_{G3}$  zu ergänzen, welche das vom Eigengewicht des Baumes verursachte Biegemoment darstellt. Wenn die Biegemomente  $M_K$ ,  $M_S$  und  $M_{G3}$  addiert werden, findet man den dritten Näherungswert des resultierenden Biegemoments,  $M_{x3} = M_K + M_S + M_{G3} = M_W + M_{G3}$ .

#### 11. Der vierte Näherungswert des absoluten und des relativen Stammdurchmessers

Wenn die dritten Näherungswerte für den Stammdurchmesser und das vom Eigengewicht des Stammes hervorgerufene Biegemoment rechts in den Gleichungen (18) eingesetzt werden, erhält man zur Bestimmung des vierten Näherungswertes für den Stammdurchmesser und die Durchbiegung die Gleichungen

$$(35 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_4^3 = \frac{32}{\pi \epsilon E_x} (M_W + M_{G3}), \\ \frac{v_4''}{(1 + v_4'^2)^{3/2}} = -\frac{64}{\pi d_4^4 E_x} (M_W + M_{G3}). \end{array} \right.$$

Wir interessieren uns in diesem Zusammenhang nur für die Bestimmung des Stammdurchmessers, da es sich erweist, dass dessen vierter Näherungswert für unsere Zwecke bereits hinreichend genau ist, weshalb die Iteration nicht fortgesetzt werden muss und der vierte Näherungswert der Durchbiegung des Stammes somit nicht benötigt wird. Um den Stammdurchmesser aus der Gleichung (35 a) zu berechnen, wäre darin der Ausdruck für  $M_W$  aus Gleichung (22) oder (28) einzusetzen und die so erzielte Gleichung nach  $d_4$  aufzulösen. Da zuvor jedoch bereits der zweite Näherungswert für den Stammdurchmesser bestimmt worden ist, erhält man dessen vierten Näherungswert bequemer aus der Gleichung (35 a) in der Gestalt

$$(36) \quad d_4 = d_2 \sqrt[3]{1 + \frac{M_{G3}}{M_w}}$$

In den Abbildungen 21, 22 und 23 ist nun nach dieser Formel der vierte Näherungswert des absoluten Stammdurchmessers dargestellt. Aus dem Verlauf dieser

Schaftformkurven geht hervor, dass die vom Eigengewicht des Baumes herührende Zunahme des Durchmessers im Vergleich mit dem Näherungswert  $d_4$  in mittlerer Stammhöhe relativ am grössten ist.

Zwecks Erhalts des relativen Stammdurchmessers wird die Gleichung (36) beiderseitig mit dem Durchmesser am Wurzelende,  $D_4$ , dividiert, wobei man erhält

$$(37) \quad \frac{d_4}{D_4} = \frac{d_2}{D_4} \sqrt[3]{1 + \frac{MG_3}{M_W}}$$

In den Abbildungen 21, 22 und 23 ist auch für diese Funktion die graphische Darstellung gegeben. Wir sehen, dass sie in dem unteren Stammabschnitt zwischen den Schaftformkurven  $d_2/D_2$  und  $d_4/D_4$  sowie in dem oberen Abschnitt links von denselben zu liegen kommt. Die Abweichungen zwischen den verschiedenen Approximationen sind jedoch verhältnismässig gering.

Durch weiteres Fortsetzen der iterativen Lösung der Gleichungen (13) und (17) auf die zuvor in den Abschnitten 8. . . 11 beschriebene Weise würde man eine unendliche Folge von Näherungswerten des Stammdurchmessers und der Durchbiegung,  $d_1, d_2, d_3, \dots$  bzw.  $v_1, v_2, v_3, \dots$  erhalten. Mittels einer näheren Untersuchung des Charakters der Rekursionsformeln (18) könnte nachgewiesen werden, dass bei denselben gewisse, für die Konvergenz des iterativen Verfahrens notwendige Bedingungen erfüllt sind<sup>1</sup>, woraus geschlossen werden kann, dass die Folge der Näherungswerte für Stammdurchmesser und Durchbiegung als Grenzwerte die Wurzeln  $d$  und  $v$  der Gleichungen (13) und (17) haben. Um einen Begriff davon zu bekommen, wie rasch die Folgen der Näherungswerte gegen ihre Grenzwerte konvergieren, hat der Verfasser für die in Abb. 22 dargestellte Kiefer noch den fünften Näherungswert des Stammdurchmessers sowie den vierten und fünften Näherungswert der Durchbiegung bestimmt. Tabelle 2 gibt eine

Tabelle 2. Die 5 ersten Näherungswerte des Stammdurchmessers am Wurzelende sowie der Durchbiegung im Gipfel der Krone für die in Abb. 22 dargestellte Kiefer.

Durchmesser $\frac{D}{\text{cm}}$	Durchbiegung $\frac{\delta}{\text{cm}}$
$D_1 = \infty$	$\delta_1 = 0$
$D_2 = 9,72$	$\delta_2 = 0$
$D_3 = 9,72$	$\delta_3 = 278$
$D_4 = 10,15$	$\delta_4 = 314$
$D_5 = 10,30$	$\delta_5 = 292$

Zusammenfassung sämtlicher berechneten Näherungswerte des Stammdurchmessers am Wurzelende und der Durchbiegung im Gipfel der Krone. Wir sehen,

<sup>1</sup> S. z.B. FR. A. WILLERS, *Methoden der praktischen Analysis*, II Aufl., S. 368. Berlin 1950.

dass  $\delta_5 < \delta_4$  ist. Würde man mit der Iteration fortfahren, so würde auch  $D_5 < D_4$  sein. Voraussichtlich ist  $D_3 < D < D_5$  und  $d \approx d_4$  ist ein für unsere Zwecke hinreichend genauer Näherungswert des Stammdurchmessers.

## 12. Einige allgemeine Regeln über die Abmessungen und die Form des Baumstammes

An Hand einer Betrachtung der Formeln (36, 37) und insbesondere des Ausdruckes des darin vorkommenden Durchmessers  $d_2$  in Gleichung (25) lassen sich einige die Abmessungen des Baumstammes und seine Form betreffende allgemeine Regeln aufstellen. Die wichtigsten von diesen sind folgende:

1. Unter der Voraussetzung, dass der Widerstandsbeiwert  $c_{w_0}$  der Krone konstant ist, ist der Stammdurchmesser an jeder Stelle des Stammes der Potenz  $V^3$  der Windgeschwindigkeit verhältnissgleich. Diese Regel ist in Wirklichkeit jedoch nur annähernd gültig, da  $c_{w_0}$  nach Abb. 11 auch von der Windgeschwindigkeit abhängig ist. Im übrigen gilt die Regel mit umso grösserer relativer Genauigkeit, je kleiner die Quotienten  $c'_w/c_{w_0}$  und  $h/l$  sind.

2. Der Stammdurchmesser ist der Kubikwurzel  $\sqrt[3]{c_{w_0}}$  aus dem Widerstandsbeiwert der Krone verhältnissgleich. Diese Regel trifft mit umso grösserer relativer Genauigkeit zu, je kleiner die Quotienten  $h/l$  und  $c'_w/c_{w_0}$  sind.

3. Der Stammdurchmesser ist der Kubikwurzel  $\sqrt[3]{\epsilon}$  aus der Zusammendrückung umgekehrt verhältnissgleich. Diese Regel ist mit umso grösserer relativer Genauigkeit gültig, je kleiner die Quotienten  $h/l$  und  $c'_w/c_{w_0}$  sowie die Schlankheit  $l/D$  des Stammes sind.

4. Der Stammdurchmesser ist der Kubikwurzel  $\sqrt[3]{E_x}$  aus dem Elastizitätsmodul umgekehrt verhältnissgleich. Betreffs dieser Regel gelten die unter 3. angeführten Bemerkungen.

5. Aus den Regeln 3 und 4 folgt auf Grund des HOOKESchen Gesetzes (7), dass der Stammdurchmesser der Kubikwurzel  $\sqrt[3]{\sigma_{bB}}$  aus der Biegefestigkeit des Holzes umgekehrt verhältnissgleich ist. Betreffs dieser Regel gelten die unter 3. angeführten Bemerkungen.

6. Der Stammdurchmesser ist der Länge  $l$  des Baumes verhältnissgleich, und zwar mit umso grösserer relativer Genauigkeit, je kleiner die Schlankheit  $l/D$  des Stammes ist.

7. Der Stammdurchmesser ist der Grösse  $\sqrt[3]{b}$  verhältnissgleich. Betreffs dieser Regel gelten die unter 3. angeführten Bemerkungen.

8. Aus der Regel 6 folgt, dass die Schlankheit  $l/D$  des Stammes mit umso grösserer Genauigkeit unabhängig von der Baumlänge ist, je kleiner die Schlankheit ist.

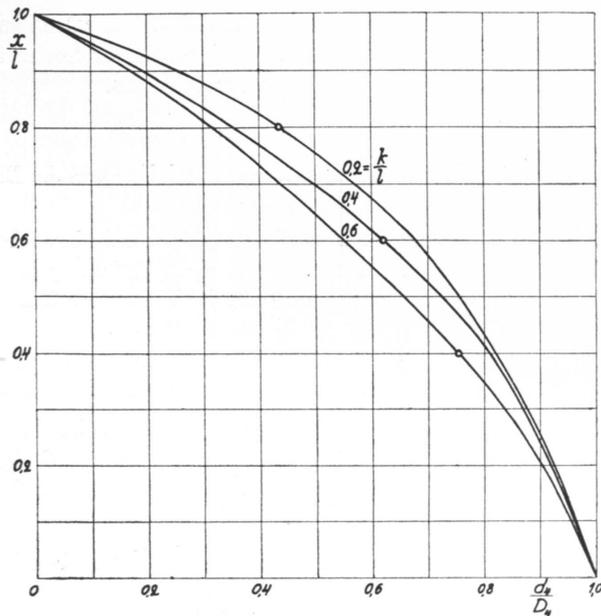


Abb. 28. Die Schaftformkurven der Kiefer mit  $k/l$  als Parameter.

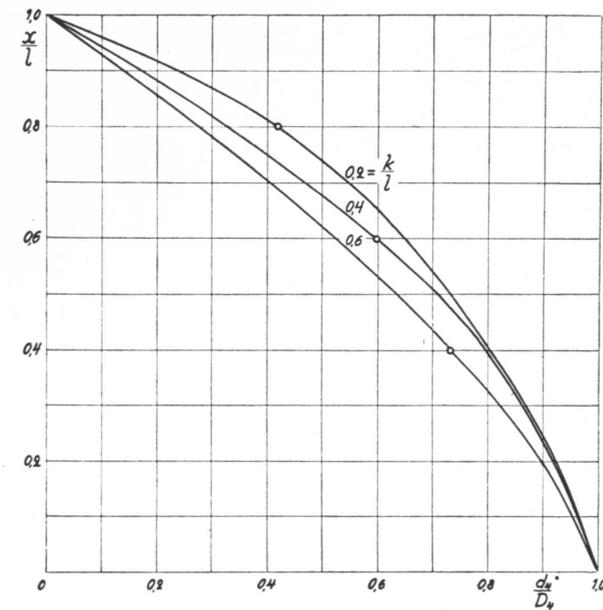


Abb. 29. Die Schaftformkurven der Birke mit  $k/l$  als Parameter.

9. Aus den Regeln 1. . . 5 folgt, dass die Schlankheit des Stammes den Grössen  $\sqrt[2]{V}$  und  $\sqrt[3]{c_{w0}}$  umgekehrt sowie den Grössen  $\sqrt[3]{\varepsilon}$ ,  $\sqrt[3]{E_x}$  und  $\sqrt[3]{\sigma_{bB}}$  direkt verhältnissgleich ist. Betreffs dieser Regeln gelten, in angeführter Reihenfolge, die im Zusammenhang mit den Regeln 1. . . 5 gemachten Bemerkungen.

10. Der relative Stammdurchmesser  $d/D$  ist mit umso grösserer Genauigkeit unabhängig von der Baumhöhe  $l$ , dem Quotienten  $b/l$ , der Windgeschwindigkeit  $V$  und der Zusammendrückung  $\varepsilon$ , je kleiner die Quotienten  $h/l$  und  $c_w/c_{w0}$  sind.

Von diesen Regeln ist namentlich die letzte von grosser Bedeutung. Darauf stützt sich nämlich der Gedanke, die Schaftform der Bäume mit Hilfe der sog. relativen Schaftformkurven darzustellen. Diese Kurven stellen den relativen Durchmesser  $d/D$  in Abhängigkeit von der relativen Höhe  $x/l$  dar. Da der Regel 10 zufolge  $d/D$  praktisch gesehen unabhängig von den Variablen  $l$ ,  $b/l$ ,  $V$  und  $\varepsilon$  ist, können nur die relative Länge der grünen Krone,  $k/l$ , der Quotient  $a/b$  und der Elastizitätsmodul  $E_x$ , genauer gesagt seine Veränderlichkeit in der Längsrichtung des Stammes von Einfluss auf die Gestalt der relativen Schaftformkurven sein. Da auch noch der letztgenannte Faktor offenbar bei den verschiedenen Individuen ein und derselben Baumart weitgehend gleichartig ist, ebensowie auch  $a/b$ , bleibt als einziger Parameter bei den relativen Schaftformkurven einer gegebenen Baum-

art nur  $k/l$  übrig. Um dessen Einfluss zu beleuchten, ist in Abb. 28 auf Grund der Schaftformkurven in Abb. 21. . . 23 der relative Stammdurchmesser  $d_4/D_4$  der Kiefer in Abhängigkeit von der relativen Höhe  $x/l$  mit dem Quotienten  $k/l$  als Parameter dargestellt worden. Abb. 29 zeigt die Schaftformkurven der Birke und Abb. 30 die der Fichte, welche mit den Werten in Tabelle 1 als Ausgangspunkt in genau gleicher Weise erzielt wurden wie soeben die Schaftformkurven

Tabelle 3. Die berechneten Formverhältnisse des Kiefern- und Birkenstammes sowie die gemessenen Formverhältnisse nach LAPPI-SEPPÄLÄ.

Formverhältnis	$k/l$	Kiefer			Birke		
		ber.	I gem.	II gem.	ber.	I gem.	II gem.
$\frac{d_{0,5} l}{d_{0,25} l}$	0,2	0,85	0,85	0,84	0,83	—	—
	0,4	0,82	0,83	0,82	0,79	0,80	0,78
	0,6	0,77	0,80	0,79	0,75	0,77	0,74
$\frac{d_{0,75} l}{d_{0,25} l}$	0,2	0,56	0,58	0,56	0,55	—	—
	0,4	0,49	0,51	0,48	0,45	0,45	0,44
	0,6	0,45	0,75	0,40	0,40	0,40	0,41

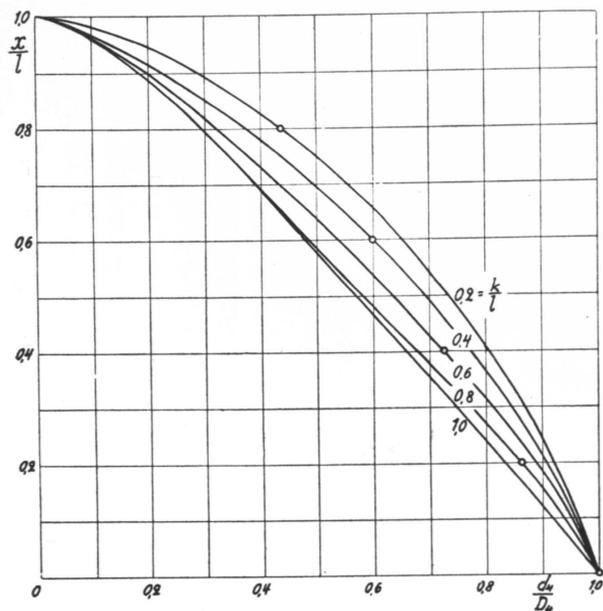


Abb. 30. Die Schaftformkurven der Fichte mit  $k/l$  als Parameter.

für die Kiefer. Um beurteilen zu können, in welchem Masse diese auf Grund der mechanischen Schaftformtheorie berechneten theoretischen Schaftformkurven der Wirklichkeit entsprechen, findet in Tabelle 3 ein Vergleich derselben mit den Messungsergebnissen von LAPPI-SEPPÄLÄ<sup>1</sup> betreffs der Schaftformkurve bei der Kiefer und der Birke statt.

In der Tabelle ist z.B. unter dem Formverhältnis  $d_{0,5l}/d_{0,25l}$  der Quotient aus den in den Teilhöhen  $0,5l$  und  $0,25l$  gemessenen Stammdurchmessern zu verstehen. Die Bäume sind in zwei Entwicklungsklassen geteilt, von denen der Klasse I herrschende und der Klasse II beherrschte Bäume angehören. Die Originalmessergebnisse von LAPPI-SEPPÄLÄ sind einigermassen ausgeglichen worden und es wurden Interpolationen zwischen den gemessenen Werten ausgeführt, um für sämtliche in der Tabelle aufgenommenen  $k/l$ -Werte die entsprechenden Formverhältnisse hervorzubringen. Weiterhin wurden die auf Grund der oben beschriebenen Messergebnisse aufgestellten Normalkurven der Kiefer zuhülfe ge-

<sup>1</sup> LAPPI-SEPPÄLÄ, M., *Tutkimuksia männyn ja koivun runkokuodosta* (Referat: Untersuchungen über die Stammform der Kiefer und Birke), Acta Forestalia Fennica. Bd. 44 (1936), S. 44.

nommen<sup>1</sup>. Bei der Birke fehlen die dem Wert  $k/l = 0,2$  entsprechenden Messergebnisse, da im Material von LAPPI-SEPPÄLÄ keine Birken mit so kleiner Krone enthalten sind. Als Allgemeinurteil dürfte man sagen können, dass wenngleich zwischen den berechneten und gemessenen Werten in einigen Einzelfällen sogar beträchtliche Unterschiede zu verzeichnen sind, die Übereinstimmung im allgemeinen eine recht gute ist.

Die in Abb. 20 dargestellten Schaftformkurven für die Fichte sind für die Parameterwerte  $k/l = 0,2 \dots 1$  gezeichnet worden, da sich die grüne Krone der Fichte bis zum Erdboden hinab erstrecken kann. Aus dem Verlauf der Kurven ist zu ersehen, dass sich die Schaftform bei grossen  $k/l$ -Werten verhältnismässig wenig ändert. Dies ist auch ganz natürlich, denn der Zuwachs des Biegemoments infolge der erdnahen Kronenpartie ist selbstverständlich sehr gering. Wenn der Elastizitätsmodul des Holzes konstant ist und das vom Eigengewicht des Baumes herrührende Biegemoment vernachlässigt wird, ist die dem Wert  $k/l = 1$  zugeordnete Schaftformkurve eine Gerade. Irgendwelche die Schaftform der Fichte betreffende systematische Messergebnisse bei verschiedenen  $k/l$ -Werten standen dem Verfasser nicht zur Verfügung.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist bei den zeitigeren, die mechanische Schaftformtheorie betreffenden Untersuchungen für gewöhnlich angenommen worden, dass der Elastizitätsmodul des Holzes in der Längsrichtung des Stammes konstant sei. Wie im Abschnitt 6 nachgewiesen wurde, ist dies nicht der Fall, sondern die Biegefestigkeit oder, was nach dem Hooke'schen Gesetz (7) damit gleichbedeutend ist, der Elastizitätsmodul nimmt von der Wurzel zur Krone hin ab. Die Regel 4 gibt uns nun Aufschluss darüber, welchen Einfluss die Abnahme des Elastizitätsmoduls auf die Schaftform des Baumes hat. Nach der Regel 4 ist  $d \approx K/\sqrt[3]{E_x}$ , wo  $K$  ein gewisser Proportionalitätsfaktor ist. Wäre nun der Elastizitätsmodul konstant, mit der Bezeichnung  $E_0$ , während  $d_0$  den entsprechenden Stammdurchmesser bezeichnen soll, so ist  $d_0 \approx K/\sqrt[3]{E_0}$ . Dividieren dieser beiden Gleichungen durcheinander liefert

$$(38) \quad \frac{d}{d_0} \approx \sqrt[3]{\frac{E_0}{E_x}}$$

Diese Formel zeigt an, in welcher Weise die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls in der Längsrichtung des Stammes den Stammdurchmesser beeinflusst. Abb. 31 zeigt die graphische Darstellung dieser Gleichung, wenn dem Elastizitätsmodul die in den Abbildungen 16. . . 18 dargestellten Werte erteilt werden. Wir sehen,

<sup>1</sup> Diese Normalkurven hat mir Herr Vizegeneraldirektor LAPPI-SEPPÄLÄ liebenswürdigst zur Verfügung gestellt. Hierfür sowie für die Durchsicht der vorliegenden Arbeit und verschiedene Vorschläge zur Verbesserung derselben in forstwissenschaftlicher Hinsicht möchte ich ihm meinen herzlichen Dank aussprechen.

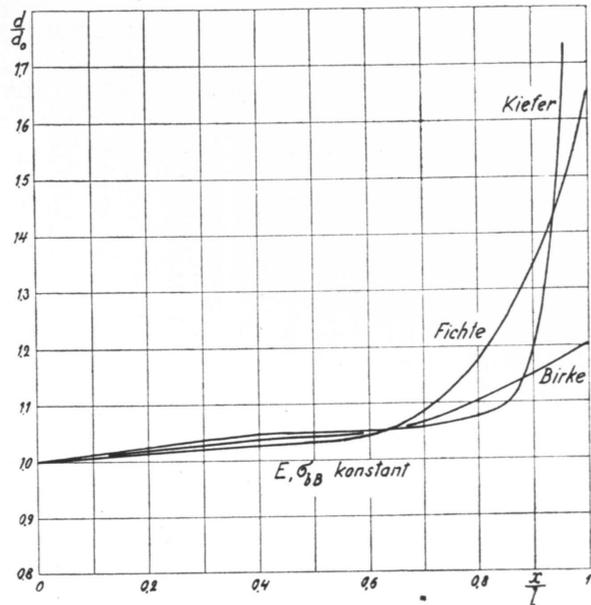


Abb. 31. Der Einfluss der Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls bzw. der Biegefestigkeit des Holzes auf den Stammdurchmesser.

dass die Einwirkung des veränderlichen Elastizitätsmoduls eine ganz beträchtliche ist, namentlich in der Kronenpartie des Stammes. Auf Grund der Regel 5 könnte die Formel (38) auch in die Form

$$\frac{d}{d_0} \approx \sqrt[3]{\frac{(\sigma_{bB})_0}{\sigma_{bB}}}$$

gebracht werden. Hier bezeichnet  $(\sigma_{bB})_0$  die unveränderliche Biegefestigkeit des Holzes.

Den Umstand, dass der Stammdurchmesser in der Kronenpartie grösser ist als die mechanische Schaftformtheorie bei konstanter Biegefestigkeit voraussetzt, hat JACCARD<sup>1</sup> herangezogen bei seinem Versuch diese Theorie als falsch zu beweisen. Unsere oben dargestellte Betrachtung zeigt indessen, dass die besagte Erscheinung völlig mit der mechanischen Schaftformtheorie vereinbar ist, wenn die Abnahme der Biegefestigkeit des Holzes beim Aufwärtsschreiten vom Wurzelende zur Krone berücksichtigt wird.

<sup>1</sup> A. a. O. Siehe auch STEFAN DUSCHEK, *Studien über die Schaftform*. Sudetendeutsche Forst- und Jagdzeitung. Taplitz-Schönau, (1935?).

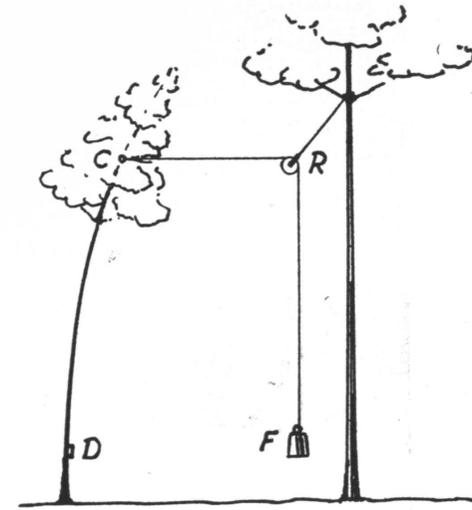


Abb. 32. Ausführung der Dehnungsmessungen am Stamme eines wachsenden Baumes.

### 13. Der Wurzelanlauf

Bei der obigen Untersuchung der Schaftform der Bäume an Hand der mechanischen Schaftformtheorie wurde der Einspannstelle des Stammes im Erdboden keine besondere Beachtung geschenkt. Die in den Abbildungen 21... 23 und 28... 30 dargestellten Schaftformkurven entsprechen daher am ehesten dem Fall einer solchen Einspannung des unteren Stammendes, bei der sich der Stamm im Erdboden weiter fortsetzen würde. Da sich der Stamm in Wirklichkeit jedoch sofort unterhalb der Erdoberfläche in die Baumwurzeln verzweigt, bedingt dies gewisse Änderungen in der Gestalt der unteren Stammartie. Dies zeigt sich in Gestalt des sog. Wurzelanlaufs, womit im folgenden die Verdickung des unteren Stammendes im Vergleich mit den oben in Abb. 21... 23 und 28... 30 dargestellten Stammdurchmessern verstanden wird.

Vom Standpunkt der mechanischen Schaftformtheorie bewertet liegt die Bedeutung des Wurzelanlaufs völlig klar auf der Hand. *Der Wurzelanlauf hat den Zweck, die untere Stammartie derart zu verstärken, dass die Zusammendrückung der äussersten Fasern im Stamm ungeachtet der vom Zusammenstossen des Stammes und der Wurzeln verursachten Dehnungsspitze konstant ist und auch der untere Teil des Stammes einen Balken von gleicher Festigkeit gegen Biegung darstellt.* Die Bedeutung des Wurzelanlaufs ist demgemäss eine rein festigkeitstheoretische. Diese

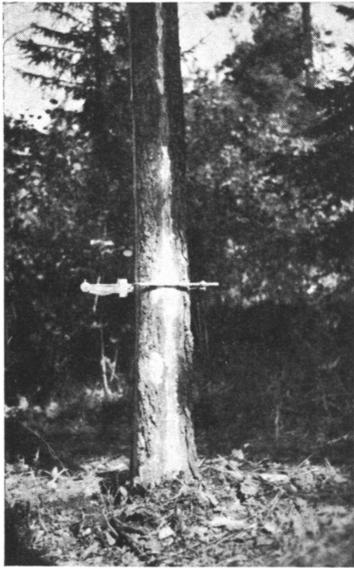


Abb. 33. Die Befestigung des HUGGENBERGERSCHEN Dehnungsmessers an einem Kiefernstamm.

Auffassung haben sich auch die meisten Forscher zu eigen gemacht<sup>1</sup>. Es besteht die Möglichkeit, auch durch unmittelbare Dehnungsmessungen nachzuweisen, dass die soeben dargestellte Auffassung richtig ist. Der Verfasser hat im Sommer 1950 in Pirkkala, im Walde des Landguts Äijälä diesbezügliche Messungen an einer Kiefer, Fichte und Birke in der aus Abb. 32 ersichtlichen Art angestellt. Im Schwerpunkt *C* der reduzierten Windfläche des Probebaums wurde am Stamm ein Seil befestigt, das in waagerechter Richtung zu einer an einem nahestehenden, standhaften Baum befestigten Seilrolle *R* und über diese zum Erdboden geführt wurde. Indem an dem Seil ein Gewicht *F* von geeigneter Grösse angehängt wurde, konnte auf dem astfreien Abschnitt des Stammes eine sehr genau ebensolche Biegebeanspruchung herbeigeführt werden, wie sie der Winddruck und das Eigengewicht des Baumes vereint hervorbringen. Durch Messen der Zusammendrückung der Holzfasern in verschiedenen Höhen am Stamm mittels eines HUGGENBERGERSCHEN Dehnungsmessers *D* erhält man einen Begriff davon, ob die Stauchung bei

<sup>1</sup> S. z.B. ERKKI LAITAKARI, *Über die Fähigkeit der Bäume sich gegen Sturmgefahr zu schützen*, AFF 34,34. Helsinki 1929. ERKKI K. CAJANDER (KALELA), *Havaintoja eräällä myrskytuhoalueella* (Referat: *Beobachtungen auf einem Sturmschadengebiet in Finnland*), AFF 40,10. Helsinki 1934. WALTER LINDHOLM, *Runkokäyrän arvoitus*. Metsätaloudellinen Aikakauskirja n:o 5. Helsinki 1934. ERIK LÖNNROTH, *Untersuchungen über die innere Struktur und Entwicklung gleichaltriger naturnormaler Kiefernbestände*. AFF 30. Helsinki 1925.

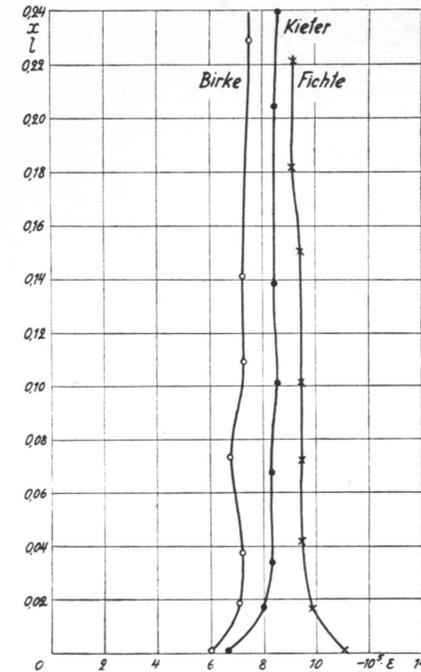


Abb. 34. Die Zusammendrückung der äussersten Fasern im Stamm bei dem Wurzelanlauf.

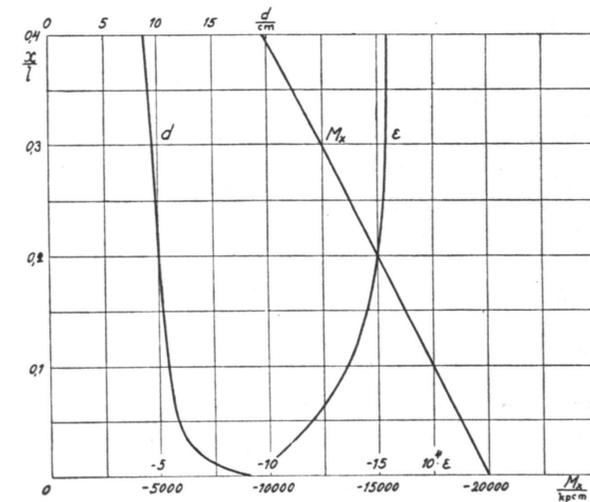


Abb. 35. Die Zusammendrückung  $\epsilon$  bei dem Wurzelanlauf laut der technischen Biegelehre.

dem Wurzelanlauf konstant ist, d.h. ob sich der Stammdurchmesser auch bei dem Wurzelanlauf nach der mechanischen Schaftformtheorie richtet. Abb. 33 zeigt die Art der Befestigung des Dehnungsmessers am Wurzelanlauf einer Kiefer. In Abb. 34 sind die Messungsergebnisse wiedergegeben. Daraus geht hervor, dass bis auf den alleruntersten Teil des Stammes nahe bei den Wurzeln die Zusammendrückung über die ganze Länge des Wurzelanlaufs praktisch gesehen konstant ist. Die Abweichungen ganz unten am Stammende sind davon bedingt, an welcher Stelle auf der Peripherie des Stammquerschnitts der Dehnungsmesser angebracht wird. Wenn man ihn zwischen zwei benachbarten Wurzeln befestigt, ergeben sich im allgemeinen kleinere Werte der Zusammendrückung. Unter der Voraussetzung, dass diese Messungen bis zur Krone des Baumes hätten erstreckt werden können, wäre es auf diese Weise möglich gewesen, die Stichhaltigkeit der mechanischen Schaftformtheorie über die ganze Stammlänge nachzuprüfen. Dies hätte jedoch die Errichtung eines hohen, vom Baumprüfling isoliert aufgestellten Beobachtungsgerüsts erfordert, wozu der Verfasser keine Möglichkeit hatte.

Die Unveränderlichkeit der Stauchung am Wurzelanlauf kann nicht auf Grund der technischen Festigkeitslehre erklärt werden. Dies geht aus der folgenden Betrachtung hervor. In Abb. 35 stellt die Kurve  $d$  den Durchmesser eines normal entwickelten Baumes bei dem Wurzelanlauf und die Kurve  $M_x$  das auf den Stamm einwirkende Biegemoment (10) dar. Wenn für den Elastizitätsmodul der Einfachheit halber der unveränderliche Wert  $E = 100\,000 \text{ kp/cm}^2$  angenommen wird, erhält man die Zusammendrückung der äussersten Fasern im Stamm auf Grund des HOOKESCHEN Gesetzes (7) aus der Formel (8) der technischen Biegelehre in der Gestalt

$$(39) \quad \varepsilon = \frac{32 M_x}{\pi d^3 E}.$$

In Abb. 35 stellt die Kurve  $\varepsilon$  diese Funktion graphisch dar. Wir sehen, dass  $\varepsilon$  im Gebiet des Wurzelanlaufs nicht konstant ist, sondern beim Aufwärtsschreiten vom Wurzelende des Stammes zunimmt. Erst oberhalb des Wurzelanlaufs behält  $\varepsilon$  einen konstanten Wert bei.

Die Ursache dieser Verschiedenheit der gemessenen und berechneten  $\varepsilon$ -Werte liegt darin, dass sich die Dehnungen im Gebiet des Wurzelanlaufs in Wirklichkeit nicht linear über die Querschnittsfläche des Stammes verteilen, wie es die Formel (39) der technischen Biegelehre voraussetzt. Es ist anzunehmen, dass die faktische Verteilung der Dehnungen den in Abb. 36 und 37 gezeigten Charakter hat. In den Abbildungen wurde versucht anzudeuten, wie die im Vereinigungspunkt der Wurzeln und des Stammes aufkommende Störung in der Verteilung der Dehnungen nach dem Prinzip von SAINT VENANT immer mehr abklingt, je weiter man sich von der Störungsstelle entweder in den Stamm oder in die Wurzel hinein entfernt. Es ist zu beachten, dass in diesen Zeichnungen die Dehnung in den äussersten

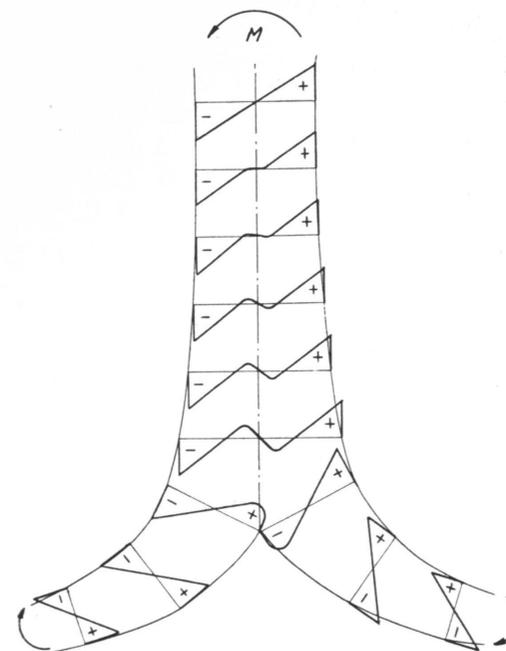


Abb. 36. Schematische Skizze der voraussichtlichen Verteilung der Dehnungen im Wurzelanlauf und in den Wurzeln der Fichte.

Fasern des Stammes und der Wurzeln konstant ist, sodass also eine derartige Verteilung der Dehnungen mit der mechanischen Schaftformtheorie vereinbar ist.

Den Umstand, dass der Durchmesser der unteren Stammpartie grösser ist als die mechanische Schaftformtheorie unter einer linearen Verteilung der Dehnungen über die Querschnittsfläche voraussetzt, hat JACCARD<sup>1</sup> bei seinem Versuch, diese Theorie zu widerlegen, als Beweis angeführt. Unsere soeben ausgeführte Betrachtung zeigt jedoch, dass die besagte Erscheinung durchaus mit der Theorie vereinbar ist, wenn die in Abb. 36 und 37 gezeigte Verteilung der Dehnungen berücksichtigt wird.

Es wäre nun unsere Aufgabe, diejenige Form des Wurzelanlaufs zu ergründen, welche die in Abb. 36 und 37 gezeigte Verteilung der Dehnungen zum Resultat gibt. Die Bestimmung einer solchen Schaftform ist ein in den Bereich der mathematischen Elastizitätslehre fallendes, ausserordentlich kompliziertes Problem. Seine Lösung wird u.a. durch die komplizierten Randbedingungen und durch die

<sup>1</sup> A. a. O.

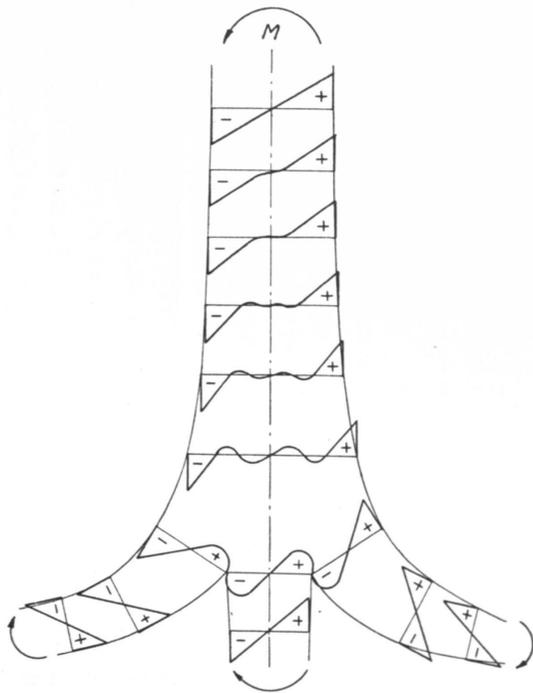


Abb. 37. Schematische Skizze der voraussichtlichen Verteilung der Dehnungen im Wurzelanlauf und in den Wurzeln der Kiefer und Birke.

Anisotropie des Holzes erschwert. Aus diesem Grunde streben wir auch gar nicht nach der vollständigen Lösung der Aufgabe, sondern begnügen uns damit, den Einfluss des Wurzelanlaufs lediglich empirisch zu berücksichtigen. Dazu gehen wir von den Messergebnissen LAPPI-SEPPÄLÄS<sup>1</sup> betreffs des Wurzelanlaufs bei der Kiefer und bei der Birke aus, die in Abb. 38 dargestellt sind. Die gestrichelte Kurve stellt die Meridiankurve des Stammes ohne Wurzelanlauf dar, während die ausgezogenen Kurven die Meridiankurve des Wurzelanlaufs bei der Kiefer und bei der Birke wiedergeben. Wenn der Durchmesser des Wurzelanlaufs mit dem Durchmesser des von der gestrichelten Kurve dargestellten Stammes dividiert wird, erhält man den sog. Verdickungsfaktor, den wir mit  $m$  bezeichnen wollen und den die ausgezogenen Kurven in Abb. 39 darstellen. Beim Beurteilen der Allgemeingültigkeit dieser Kurven ist zu beachten, dass das Vorkommen der Länge  $l$  in der Variablen  $x/l$  nicht zweckmässig ist. An Hand analoger Fälle in der Festigkeits-

<sup>1</sup> A. a. O., S. 33 u. 35.

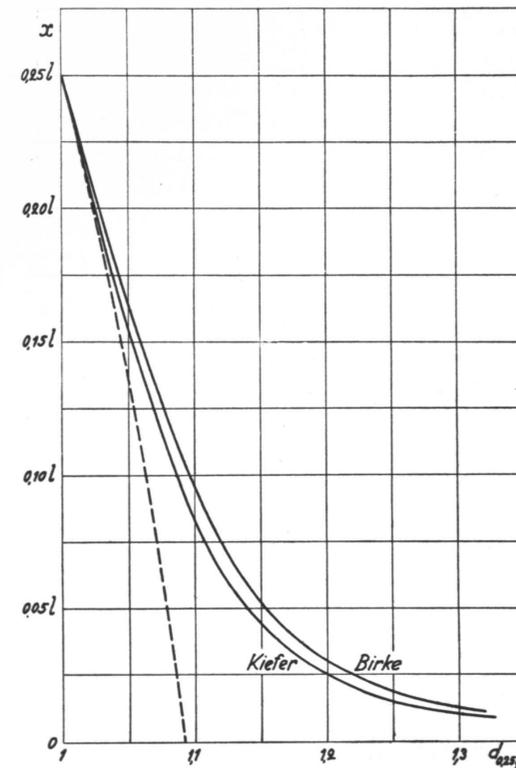


Abb. 38. Der Wurzelanlauf bei der Kiefer und der Birke nach LAPPI-SEPPÄLÄ.

lehre kann man schliessen, dass als dimensionslose Längenkoordinate zweckmässig  $x/D$  oder also  $x/l \cdot l/D$  zu wählen ist, wo  $D$  den Durchmesser des Stammes am Wurzelende ohne Wurzelanlauf bezeichnet.

Um für den Verdickungsfaktor  $m$  einen analytischen Ausdruck zu erhalten, der bei Berechnungen des Stammdurchmessers angewandt werden kann, ist es angebracht, die Kurven in Abb. 39 mittels einer geeigneten Funktion zu approximieren. Mit einer für unsere Zwecke hinreichenden Genauigkeit kann hierzu die Funktion

$$(40) \quad m = 1 + \frac{\alpha}{\left(\frac{l}{D} \cdot \frac{x}{l} + \beta\right)^2}$$

dienen. Diese enthält zwei freie Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ , deren Werte so zu wählen sind, dass die Funktionswerte möglichst gut den Versuchsergebnissen anschliessen. Den Parameter  $\beta$  kann man als diejenige, mit dem Durchmesser  $D$  des Stammes am

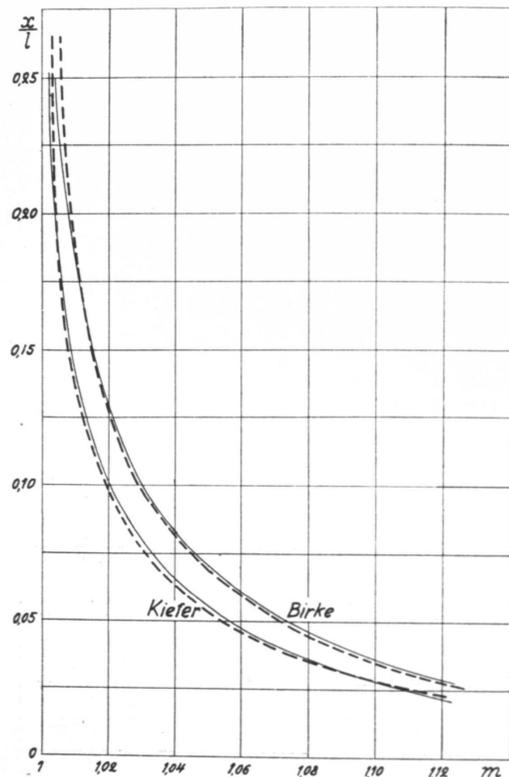


Abb. 39. Der dem Wurzelanlauf entsprechende Verdickungsfaktor bei der Kiefer und der Birke.

Wurzelse als Einheit gemessene Tiefe unter der Erdoberfläche auslegen, in der sich die Flachwurzeln befinden. Setzt man ein für

$$(41) \quad \begin{aligned} \text{Kiefer: } a &= 3,23, \quad \beta = 1,93 \\ \text{Birke: } a &= 9,78, \quad \beta = 4,95 \end{aligned}$$

und wählt man für die Schlankheit die durchschnittlichen Werte  $l/D = 115$  bzw. 138 für Kiefer bzw. Birke, so erhält man als graphische Darstellung der Funktion (40) die gestrichelten Kurven in Abb. 39, die sich verhältnismässig eng den Kurven für den aus LAPPI-SEPPÄLÄS Messungsergebnissen hergeleiteten Verdickungsfaktor des Wurzelanlaufs anschmiegen.

Wenn der Ausdruck für den Stammdurchmesser  $d_4$  in Gleichung (36) mit dem Ausdruck (40) für  $m$  multipliziert und der so gefundene endgültige Stammdurchmesser mit  $d$  bezeichnet wird, hat man

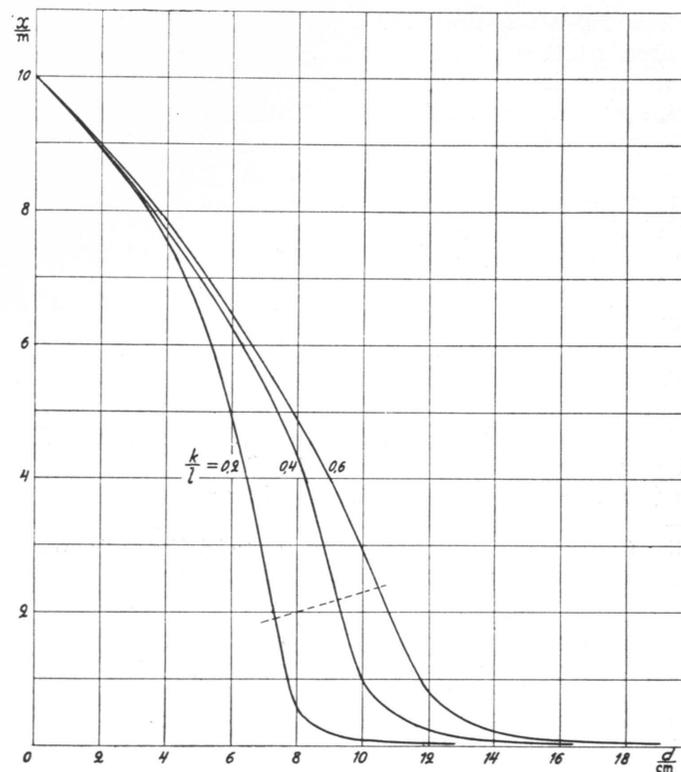


Abb. 40.

$$(42) \quad d = d_2 \left[ 1 + \frac{a}{\left( \frac{l}{D} \cdot \frac{x}{l} + \beta \right)^2} \right] \sqrt[3]{1 + \frac{M_G}{M_W}}$$

Hier müsste noch für den astfreien Stammabschnitt der Ausdruck für  $d_2$  aus Gleichung (25) oder (26) und für die Kronenpartie aus Gleichung (29) eingesetzt werden. Das vom Eigengewicht des Baumes herrührende Biegemoment  $M_G$  ist auf die im Abschnitt 10 dargestellte Weise zu bestimmen. Die Formel (42) ist unsere Endformel für den Stammdurchmesser.

In Abb. 40 sind die Schaftformkurven der Kiefer nach Formel (42) berechnet für  $k/l = 0,2, 0,4$  und  $0,6$  dargestellt. Die Schaftformen weichen von den in den Abbildungen 21...23 dargestellten nur bezüglich des Wurzelanlaufs ab. Der Ort der Inflexionspunkte der Schaftformkurven ist als gestrichelte Linie eingezeichnet. Ihr Verlauf lässt erkennen, dass der Inflexionspunkt umso höher liegt, je kleiner

die Schlankheit  $l/D$  des Stammes ist. Dies steht im Einklang mit den Messergebnissen, denn sowohl auf Grund des Materials über Kiefern von LAPPI-SEPPÄLÄ als desjenigen über Birken von HILDÉN<sup>1</sup> lässt sich die Existenz eines diesartigen Zusammenhanges nachweisen. Das Auftreten einer solchen Erscheinung in der Formel (42) kam durch die Wahl von  $x/l \cdot l/D = x/D$  als Längenkoordinate im Ausdruck (40) für  $m$  an Stelle von  $x/l$  zustande.

Als Wurzelanlauf bezeichnet man gewöhnlich die Strecke bis zum Inflexionspunkt der Schaftformkurve. Dieser Inflexionspunkt stellt sich dort ein, wo sich die entgegengesetzten Krümmungen der Schaftformkurven (Abb. 28. . . 30) ohne Wurzelanlauf und des Verdickungsfaktors (Abb. 39) aufheben. Hieraus kann man weiter folgern, dass sich in Wirklichkeit der Wurzelanlauf bedeutend über den Inflexionspunkt hinaus erstreckt. Wenn man die Sachlage vom Standpunkt der Festigkeitslehre betrachtet, kann man geradezu sagen, dass sich der Einfluss des Wurzelanlaufs bis zum Gipfel des Baumes erstreckt. In Abb. 39 müsste dies derart zutage treten, dass  $m > 1$ , wenn  $x < l$  ist. Die Funktion (40) erfüllt in der Tat diese Forderung. Als praktische obere Grenze des Wurzelanlaufs kann man jedoch mit gutem Grund den Inflexionspunkt der Schaftformkurve ansehen.

<sup>1</sup> N. A. HILDÉN (OSARA), *Koivun kuutioimisesta massataulukoiden avulla*. AFF 32 (1926), S. 28.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung .....	1
2. Die Windgeschwindigkeit im Waldbestand .....	5
3. Der Widerstandsbeiwert der Baumkrone und des Stammes .....	8
4. Die reduzierte Windfläche der Krone .....	12
5. Die Bruchhypothese des Holzes .....	14
6. Die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls in der Längsrichtung des Stammes ....	16
7. Die Grundgleichungen der mechanischen Schaftformtheorie .....	19
8. Der zweite Näherungswert des absoluten und des relativen Stammdurchmessers ....	22
9. Der dritte Näherungswert der Stammdurchbiegung .....	29
10. Der dritte Näherungswert des vom Eigengewicht des Baumes herrührenden Biegemoments .....	31
11. Der vierte Näherungswert des absoluten und des relativen Stammdurchmessers ....	33
12. Einige allgemeine Regeln über die Abmessungen und die Form des Baumstammes ..	35
13. Der Wurzelanlauf .....	41

## Übersicht der häufiger angewandten Bezeichnungen

$A$	Flächeninhalt	$c'_w$	Widerstandsbeiwert des Stammes
$A_R$	reduzierte Windfläche	$d$	Stammdurchmesser
$C$	Schwerpunkt	$d_0$	Stammdurchmesser bei konstantem Elastizitätsmodul
$D$	Stammdurchmesser am Wurzelende ohne Wurzelanlauf	$d_K$	dem Biegemoment $M_K$ entsprechender Stammdurchmesser
$E$	Elastizitätsmodul des Holzes	$g$	Gewicht des Baumes je Längeneinheit
$E_0$	Elastizitätsmodul des Holzes am Wurzelende	$h$	Länge des astfreien Stammabschnitts
$F$	Kraft	$k$	Länge der Krone
$G$	Gewicht	$l$	Höhe des Baumes
$I$	Trägheitsmoment der Querschnittsfläche des Stammes	$m$	Verdickungsfaktor
$M$	Biegemoment	$n$	Sicherheitsbeiwert
$M_G$	vom Eigengewicht des Baumes herührendes Biegemoment	$p$	Druck
$M_K$	von der Krone infolge des Windes herührendes Biegemoment	$q = \frac{1}{2} \rho V^2$	Staudruck
$M_S$	vom Stamm infolge des Windes herührendes Biegemoment	$r$	} Abkürzungen in den Formeln (24)
$M_W = M_K + M_S$	vom Wind herbeigeführtes Biegemoment	$s$	
$M_x = M_W + M_G$	gesamtes Biegemoment im Schnitt $x$	$v$	Durchbiegung des Stammes
$R$	Krümmungshalbmesser der elastischen Linie des Stammes	$x$	Längenkoordinate des Stammes, vom Erdboden gemessen
$V$	Windgeschwindigkeit	$x' = l - x$	
$V_0$	Windgeschwindigkeit an der unteren Begrenzung der Krone	$z$	Längenkoordinate des Stammes, vom Schwerpunkt $C$ der Windfläche gemessen
$W$	Widerstandsmoment der Querschnittsfläche des Stammes	$\alpha$	} Abkürzungen in der Formel (39)
$a$	Breite der trapezförmigen reduzierten Windfläche an der oberen Begrenzung der Krone	$\beta$	
$b$	Breite der trapezförmigen reduzierten Windfläche an der unteren Begrenzung der Krone	$\gamma$	spezifisches Gewicht des Stammes
$c$	Abstand des Schwerpunkts der reduzierten Windfläche vom Baumgipfel	$\gamma_r$	reduziertes spezifisches Gewicht des Stammes
$c_{w_0}$	Bezugswiderstandsbeiwert der Krone	$\delta$	Durchbiegung des Wipfels
		$\varepsilon$	Zusammendrückung
		$\varepsilon_B$	Bruchzusammendrückung
		$\eta$	Durchbiegung des Stammes im Abstand $\xi$ vom Erdboden
		$\xi$	Der Durchbiegung $\eta$ entsprechende Längenkoordinate
		$\rho$	Luftdichte
		$\sigma$	Spannung
		$\sigma_b$	Biegespannung
		$\sigma_{bB}$	Biegefestigkeit