ACTA FORESTALIA FENNICA

Vol. 90, 1968

Beschreibung des Wachstums der Bäume als Funktion ihres Alters

Yrjö Kangas

SUOMEN METSÄTIETEELLINEN SEURA

Suomen Metsätieteellisen Seuran julkaisusarjat

ACTA FORESTALIA FENNICA. Sisältää etupäässä Suomen metsätaloutta ja sen perusteita käsitteleviä tieteellisiä tutkimuksia. Ilmestyy epäsäännöllisin väliajoin niteinä, joista kukin käsittää yhden tutkimuksen.

SILVA FENNICA. Sisältää etupäässä Suomen metsätaloutta ja sen perusteita käsitteleviä kirjoitelmia ja lyhyehköjä tutkimuksia. Ilmestyy neljästi vuodessa.

Tilaukset ja julkaisuja koskevat tiedustelut osoitetaan Seuran kirjastolle, Unioninkatu 40 B, Helsinki 17.

Publications of the Society of Forestry in Finland

ACTA FORESTALIA FENNICA. Contains scientific treatises mainly dealing with Finnish forestry and its foundations. The volumes, which appear at irregular intervals, contain one treatise each.

SILVA FENNICA. Contains essays and short investigations mainly on Finnish forestry and its foundations. Published four times annually.

Orders for back issues of the publications of the Society, subscriptions and exhange inquiries can be adressed to the Library: Unioninkatu 40 B, Helsinki 17, Finland.

BESCHREIBUNG DES WACHSTUMS DER BÄUME
ALS FUNKTION IHRES ALTERS

EIN BEITRAG
ZU DEN METHODISCHEN GRUNDLAGEN
DER MATHEMATISCHEN WACHSTUMSANALYSE

YRJÖ KANGAS

Helsinki 1968

Helsinki 1969. Uudenmaan Kirjapaino O.Y.

VORWORT

Die Anregung dazu, mich in den Themenkreis zu vertiefen, mit dem die vorliegende Untersuchung verknüpft ist, habe ich bei meiner praktischen Arbeit bekommen, und zwar ausgesprochen anlässlich der Ertragshiebsberechnungen, deren sinnreiche Grundidee mein verehrter ehemaliger Vorgesetzter, der verstorbene Prof. V. LIHTONEN entwickelt hat. Derartige Berechnungen haben ja ganz besonders grossen praktischen Wert für die Forsteinrichtung, namentlich heutzutage, wo die technischen Voraussetzungen, nicht zuletzt die Datenverarbeitungsmaschinen, ganz andere Möglichkeiten für ihre zweckentsprechende Ausführung bieten als bisher. Dies aber stellt wieder eigene Anforderungen an die dabei angewandten Methoden. Bei der Miteinbeziehung des Zuwachses ist es dann ausschlaggebend wichtig, wie effektiv und anpassungsfähig sowie vor allem wie zweckdienlich die jeweils zur Verfügung stehenden Verfahren sind. Damit die Zuwachsprognosen in dieser ständigen Weiterentwicklung der technischen Anwendungsmöglichkeiten zeitgemäss bleiben können, müssen wir Sorge dafür tragen, dass auch die ihnen zugrunde liegende Theorie stets brauchbar und ausreichend erforscht ist. Dieser Gesichtspunkt hat denn auch der vorliegenden Untersuchung entscheidend die Richtung gewiesen. Die Arbeit zielt in erster Linie darauf hin, in dem obigen Sinne die Grundlage zu beleuchten, auf der man die Zuwachsprognosen an sich aufzubauen hat, und von der man ausgehen muss, wenn man dafür Methoden entwickeln will, die nicht nur der Forschung, sondern auch den Bedürfnissen der Praxis zweckdienliche Resultate bieten.

Die vorliegende Untersuchung habe ich neben meiner beruflichen Tätigkeit als Freizeitbeschäftigung begonnen und im Lauf vieler Jahren weitergeführt. Erst später kam der Gedanke auf, sie für die Veröffentlichung durchzuarbeiten. Über die Anwendung der mathematisch-statistischen Methoden durfte ich von Anfang an ständig mit Herrn Prof. S. MATTILA beraten, und dank dessen ist es mir möglich geworden, meine Arbeit in solchem Sinn aufzubauen, wie sie es naturgemäss verlangt. Unsere Sachkundigen auf dem Gebiet der Holzmesslehre, die Herrn Professoren A. NYYSSÖNEN und K. KUUSELA, haben meine Arbeit durchgelesen und mir Hinweise und Anregungen zu dem eigentlichen Thema gegeben. Das von der Stiftung für Untersuchung der Naturschätze Finnlands mir gewährte Stipendium wiederum hat es mir ermöglicht, den Text in die deutsche Sprache übersetzen zu lassen, und den letzten Schliff konnte ich der

Arbeit dank des Hilfsgeldes der Emil Aaltonen-Stiftung geben. Die Forstwissenschaftliche Gesellschaft in Finnland veröffentlicht die Untersuchung in ihrer Publikationsserie.

Allen den oben genannten Personen und Gesellschaften und auch allen denen, die mir sonstwie behilflich gewesen sind, will ich jetzt, wo die Arbeit endgültig fertig vorliegt, meinen besten Dank aussprechen.

Helsinki, im November 1968

Yrjö Kangas

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG

11. DIE SONDERZÜGE DES WACHSTUMSVORGANGS DER BÄUME

Die Entwicklung der Baumindividuen und der von ihnen gebildeten Populationen wird im Prinzip von den gleichen Faktoren wie auch in der übrigen Vegetation bewirkt, und auf sie treffen somit in der Hauptsache die gleichen allgemeinen Gesetzmässigkeiten und Abhängigkeitsbeziehungen zu, die auch sonst im Bereich der Vegetation gelten (vgl. z.B. ASSMANN 1961, S. 7—38). Indessen wird der Wachstumsvorgang der Bäume auch von eigenen, für diese kennzeichnenden Sonderzügen charakterisiert. Ein solcher ist speziell die im Vergleich mit dem allgemeinen Altersniveau der Pflanzen grosse *Langlebigkeit* der Bäume, welche sie ganz wesentlich von der Mehrheit der sonstigen Pflanzenwelt unterscheidet. In erster Linie verleiht eben dies dem Entwicklungsprozess der von ihnen gebildeten Pflanzengesellschaften, der Baumbestände und Wälder, seine von anderen Pflanzenbestandtypen verschiedene Prägung. Besonders die recht langsam vor sich gehende Entwicklung in Richtung auf einen stabilen Klimaxzustand ist ein ihr eigener Zug, so dass der Anteil der noch im Entwicklungsstadium stehenden Sukzessionsgesellschaften in Waldbeständen die entscheidende Hauptrolle spielt (vgl. KALELA 1949, S. 56). Fernerhin erreichen in der Regel die Baumindividuen im Vergleich zur allgemeinen Stufe der Pflanzen eine beträchtliche *Grösse*, wodurch die Unterschiede zwischen den Baumindividuen auch im Bereich ein und desselben Baumbestands erheblich stärker zur Geltung kommen als in Pflanzenbeständen im allgemeinen. In dieser Beziehung ist die Verschiedenheit von der zweiten, wirtschaftlich bedeutungsvollen Vegetationsgruppe, von derjenigen der Landwirtschaft, ganz wesentlich, und dies hat selbstverständlich auch einen ausschlaggenbenden Einfluss auf den verschiedenen Charakter der Erforschung ihrer Wachstumsvorgänge (vgl. THOMASIUS 1964, S. 720—721).

Im Rahmen der Zivilisation wirkt auch der Mensch in ausschlaggebendem Grade auf den Entwicklungsprozess der Wälder ein, und demzufolge *gestaltet sich der Wachstumsvorgang der Wirtschaftswälder* seinem Charakter nach *wesentlich verschieden* von dem der Wälder im Naturzustand. Während in diesen die Baumgesellschaft sich fortdauernd dem Klimaxzustand zustrebend entwickelt, greift in den Wirtschaftswäldern der Mensch durch seine eigenen Massnahmen radikal in den Wachstumsvorgang des Baumbestands ein. Durch diese Massnahmen werden die bestandinneren Konkurrenz- und Abhängigkeitsverhältnisse der

Baumindividuen untereinander abrupt und im allgemeinen sehr scharf verändert. Vom Standpunkt des Entwicklungsprozesses der Bäume ist eben *das Akute und die Stärke der Massnahmen den Wirtschaftswäldern eigen.* Entsprechendes kommt in Naturverhältnissen nur in Ausnahmefällen, in erster Linie als Folge von Naturkatastrophen vor.

Im Hinblick auf die Erforschung der Wachstumsvorgänge hat dieser mit den Wirtschaftswäldern verknüpfte Zug besondere Bedeutung, indem *er die Forschungsarbeit* in beträchtlichem Mass *kompliziert* und ihr damit mehr verwickelte Natur verleiht. Die Wirkung solcher zeitweiliger, vom Standpunkt des Bestandes selbst tiefgreifender Strukturveränderungen ändert selbstverständlich erheblich die Entwicklung. Die Beschaffenheit und die Bedeutung der von ihnen herrührenden Einwirkungen sind weit schwerer zu deuten als bei einem gleichmässig ablaufenden Wachstumsvorgang.

Ein zweiter bezeichnender Zug im Entwicklungsvorgang der Wirtschaftswälder gegenüber den Wäldern im Naturzustand ist die geregelte Verjüngung der ersteren, sogar im allgemeinen zeitig vor der Phase des natürlichen Alterstods, da es sinnvoll ist, die Entwicklung sofort zu unterbrechen, wenn ein weiterer Fortgang des Prozesses vom wirtschaftlichen Gesichtspunkt nicht mehr zweckdienlich ist. Hieraus folgt, dass *Ermittlungen* in Bezug auf den Wachstumsvorgang von Wirtschaftswäldern *hinsichtlich des rückgängigen Ablaufes des Zuwachses* meistenfalls *nicht zu erhalten sind.* Dies hat ja seinen eigenen Einfluss auch auf das von den anderen Phasen des Prozesses erhältliche Bild. Man muss sich mit denjenigen Angaben begnügen, die aus Wäldern im Naturzustand noch erhältlich sind; es gilt dann zu versuchen, dieselben bei der Betrachtung des Wachstumsvorganges der Wirtschaftswälder in geeigneter Weise anzuwenden.

12. DER WACHSTUMSVORGANG DER BÄUME UND SEINE ANALYSE ALS MATHEMATISCH-STATISTISCHES PROBLEM

Allgemein gesehen kann man davon ausgehen, dass das Beobachtungsmaterial, welches das Wachstum der Bäume an sich betrifft, stets in Form einer messbaren Grösse vorliegt, es mag sich um das Wachstum in seiner Gesamtheit oder auch nur um irgendeine seiner Teilkomponente handeln. Diese Tatsache hat einen ausschlaggebenden Einfluss auf die Wahl der Verfahren, die man zur mathematisch-statistischen Behandlung des den Wachstumsvorgang repräsentierenden Materials anwendet. Dagegen kann darin gewiss sonstige mit dem Wachstumsvorgang verknüpfte Information enthalten sein, die man nicht als Messwerte zur Darstellung bringen kann. Dies kann geradezu dadurch bedingt sein, dass die Daten — z.B. diejenigen betreffs Holzarten — überhaupt nicht zu bemessen sind. Am gewöhnlichsten ist jedoch vielleicht der Fall, dass die Feststellung des betreffenden Messwerts nicht möglich oder auch aus einem bestimmten Grunde nicht zweckmässig ist.

Als *Grundaufgabe* der Wachstumsanalyse kann man *die Lokalisation des Niveaus eines Wachstumsvorgangs* mit der Messung der Homogenität des betreffenden Materials durch Wiedergabe seiner Streuung erachten. Wenn man ein mehr in die Einzelheiten gehendes Bild von den im Beobachtungsmaterial enthaltenen Wirkungsbeziehungen haben will, muss man weiter getriebene Methoden des statistischen Schätzens heranziehen, um *Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Wirkungsbeziehungen schätzen* zu können. Dies kann durch Testen der Bedeutung verschiedener Wachstumsfaktoren und durch die Messung des Betrags ihrer Wirkung ausgeführt werden.

Als Veränderliche einer Wachstumsanalyse in der Form, worin sie in dem hier besprochenen Sinn behandelt werden, ist es zweckmässig, als **Wachstumsfaktoren** im weiteren Sinne *alle* diejenigen *Wirkungsbeziehungen* zu interpretieren, die sich jeweils mit dem betreffenden Wachstumsvorgang verknüpfen. *Diese können* dann tatsächlich, entweder *direkt oder indirekt*, auf den Wachstumsvorgang *einwirken;* sie können aber auch lediglich in Korrelation mit tatsächlichen Wachstumsfaktoren stehen und nur ihre Wirkungen widerspiegeln (vgl. JONSSON 1962, S. 71). In der hier zur Betrachtung kommenden Wachstumsanalyse handelt es sich in erster Linie *um Messung der wahrnehmbaren Wirkungsbeziehungen.* Ehe es möglich ist, die Bedeutung einer solchen in ihrer Gesamtheit zu beurteilen, muss man jedoch in hinreichendem Mass die darin enthaltenen tatsächlichen Wachstumsfaktoren kennen. Zumeist setzt es jedoch eine Wachstumsanalyse von völlig verschiedenem Inhalt voraus.

In seiner Betrachtung der im Wachstum der Bäume enthaltenen allgemeinen Grundsätze teilt THOMASIUS (1964) die dasselbe beeinflussenden Faktoren in drei Kategorien ein: *Zeit, Umwelt* und *Erbanlagen.* Man kann das Wachstum hinsichtlich einer jeden dieser Gruppen betrachten, indem man dabei annimmt, dass der Einfluss der beiden übrigen unverändert bleibt. Wenn man die Zeit zum Ausgangspunkt nimmt, erhält man nach ihm die eigentliche *Wachstumskurve*, während wieder die Einwirkung der Umweltfaktoren von der *Ertragskurve* beschrieben wird. Betreffs der *Erbanlagen,* die im Wachstumsvorgang in erster Linie *als Wachstumsfähigkeit zum Ausdruck kommen* (s. BERTALANFFY 1951, S. 267), ist THOMASIUS der Ansicht, dass wenigstens bis auf weiteres kein anwendbares Mittel für die Bemessung der genetischen Konstitution von Lebewesen zu finden ist.

Im allgemeinen wird nach THOMASIUS das Wachstum einseitig auf Grund bloss einer der obengenannten Kategorien dargestellt. In der Forstwirtschaft baut die Betrachtung in der Regel auf der Zeit auf, da dort langlebige Organismen in Frage stehen, bei denen die Bemessung der Umweltfaktoren Schwierigkeiten bereitet. In der Landwirtschaft, wo es sich zumeist um einjährige Pflanzen handelt, liegt das Hauptgewicht ausdrücklich auf der Mannigfaltigkeit der Umweltfaktoren, während schliesslich die Pflanzenzüchtung besonders auf der Verschiedenheit der Erbanlagen fusst. *Solche Modelle* müssen sich nach THOMASIUS jedoch als *Spezialfälle einer allgemeinen Wachstumsfunktion* ableiten lassen, die sowohl biologische, mathematische als auch praktische Belange erfüllt. In erster Linie kommt dies hinsichtlich der Zeit und der Umweltfaktoren bei gleichbleibenden Erbanlagen in Frage. Er erachtet vom praktischen Standpunkt eine solche Möglichkeit für bedeutungsvoll, da es oft gar nicht möglich ist, das Wachstum unter völlig konstanten Bedingungen zu untersuchen.

Obgleich man die von THOMASIUS dargestellte Auffassung in ihren Grundsätzen als annehmbar ansehen kann, wird aus dem obigen Grunde *die Interpretation des Einflusses der Umweltfaktoren als einheitliche Gesamtheit* in der Tat *nicht möglich* sein. Es ist demnach nicht zweckmässig, beim Aufstellen des in der Wachstumsfunktion enthaltenen Wachstumsmodells einen derart schematischen Ausdruck für die verschiedenen Wachstumsfaktoren beizubehalten, sondern es empfiehlt sich, hierbei dem Wesen der Wirkung verschiedener Wachstumsfaktoren der Umwelt (vgl. LYR—HOFFMANN 1967) grössere Beachtung zu schenken, wie im späteren Zusammenhang näher hervorgehen wird. Ein derartiges Vorgehen ist im Grunde recht natürlich, da die Umweltfaktoren einen äusserst heterogenen Faktorenkomplex ausmachen, der eine Unzahl separater, voneinander mehr oder weniger unabhängiger Wachstumsfaktoren einschliesst. Ausserdem kann ihre Wirkung entweder mehr oder weniger systematisch oder auch von ganz zufälliger Art sein, wie später eingehender dargelegt wird (S. 37—39). Dagegen kommt die *Gesamtwirkung der Erbanlagen* offenbar als ein recht *homogener*, auf den Wachstumsrhythmus der Bäume bedeutend wirkender Faktor zum Vorschein, dessen nähere Untersuchung im Zusammenhang einer Wachstumsanalyse wie die hier vorliegende kaum seinem Zweck entspricht.

Somit ist *der Wachstumsvorgang der Bäume am natürlichsten als Zeitreihe interpretierbar*. Das Vorkommen eines Trends ist im Wachstumsvorgang eine charakteristische Erscheinung, deren Verlauf normal auch leicht feststellbar ist (vgl. LÖNNROTH 1927, S. 27—28). Dagegen kann man im allgemeinen die periodische Schwankung vom Standpunkt der statistischen Analyse in ihm nicht hinreichend regelmässig herausbringen. Meistens kommt man ja in der Tat besser zum Resultat, indem man nach anderen Mitteln zu ihrer Bemessung sucht.

Eine deutliche Periodizität ist allerdings mit dem Rhythmus des Wachstums der Bäume während der Wachstumsperiode verbunden. Vom Standpunkt des ganzen Wachstumsvorgangs hat dies indessen seinen eigenen, verschiedenartigen Charakter, dessen nähere Analyse im Zusammenhang mit demselben keine unmittelbare Bedeutung hat. Man kann erachten, dass die darin enthaltenen Wirkungsbeziehungen im Zusammenhang in den sonstigen Wachstumsfaktoren zum Ausdruck kommen. Die allgemeine Praxis hat auch ergeben, dass man *den Wachstumsbetrag je Wachstumsperiode als Ganzes*, als jährlichen Zuwachs betrachtet, der allgemein als eine gewisse Grundeinheit des Wachstums in Anwendung gebracht wird (vgl. z.B. RICHTER 1963, S. 24). Innerhalb dieses Rahmens stellen die Variationen im Bereich der Wachstumsperiode ihrerseits einen gesonderten, recht bedeutungsvollen Betrachtungsaspekt dar.

13. DIE BESCHAFFENHEIT DES BEOBACHTUNGSMATERIALS UND SEINE EIGNUNG ZUR MATHEMATISCH-STATISTISCHEN ANALYSE

Bei Messungen des Zuwaches bedient man sich verschiedener Verfahren (s. z.B. PRODAN 1965, HILDEBRANDT 1967), bei denen es sich jedoch normalerweise um Beobachtungen handelt, die sich auf eine Zeitspanne länger als ein Jahr beziehen. Die Messungen hinsichtlich beider Grenzpunkte eines solchen Zeitintervalls können entweder gleichzeitig oder auch getrennt, zu den beiden Grenzzeitpunkten des Intervalls gemacht werden. Von den erstgenannten kommt besondere Bedeutung den Stammanalysen zu, in denen die gesamte Entwicklung eines Baumindividuums in gewünschten Zeitintervallen sehr genau festgelegt werden kann (vgl. z.B. SPURR 1952, S. 226—228). Als typische Vertreter des letzteren Vorgehens wieder kann man die Dauerversuchsflächen betrachten, deren fortlaufendes Beobachten beispielsweise in Deutschland stets einen wichtigen Bestandteil beim Aufstellen von Ertragstafeln ausgemacht hat (vgl. z.B. WECK 1951a, S. 14).

Die den Zuwachs betreffenden Beobachtungen beziehen sich meistens auf Messperioden von 5 oder 10 Jahren (vgl. z.B. PRODAN 1965, S. 420). Ein solches Vorgehen kann man im allgemeinen als hinreichend erachten. Theoretisch richtiges Verfolgen des Wachstumsvorgangs setzt freilich in gewissen Fällen der Wachstumsanalyse gesonderte Ermittlung des Zuwaches in den einzelnen Jahren voraus. In der Regel spielt die dadurch verursachte Fehlerhaftigkeit des Verfahrens selbst bei Forschungsaufgaben kaum eine Rolle.

Mit Rücksicht auf die mathematisch-statistischen Anwendungen ist es für die Brauchbarkeit des Beobachtungsmaterials besonders bedeutsam, in welchem Grad es den Anforderungen genügt, die die thereoretischen Grundlagen der bei der Analyse herangezogenen Verfahren besonders *bezüglich der Unabhängigkeit* der Beobachtungen stellen. Zeitreihen ihrerseits sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre einzelnen Beobachtungen nicht für untereinander unabhängig gelten können (vgl. KENDALL-STUART 1966, S. 348—350), und dies hat auch viel Diskussion über die Berechtigung einer Analyse auf Grund eines solchen Materials hervorgerufen (vgl. z.B. CRAMER 1951, S. 146). Wie HALD (1952, S. 661) bemerkt, hindert dies jedoch nicht daran, den Verlauf des Wachstumsvorgangs mit einem gegebenen Modell zu beschreiben, wenn nur *bei der Beurteilung der Ergebnisse die Beschaffenheit des Materials* in erforderlichem Mass *berücksichtigt wird*. Vom Standpunkt der auszuführenden Analyse handelt es sich nämlich hierbei in erster Linie darum, dass dafür gewöhnlicherweise kein zu einem solchen Material, das nicht die Unabhängigkeitsbedingung erfüllt, passendes Verfahren zur Verfügung steht, da der Grad der Abhängigkeit nicht bekannt ist (vgl. z.B. LIENERT 1962, S. 269—270).

Das erhältliche Material kann im Hinblick auf seine Beschaffenheit betreffs der Unabhängigkeit in einzelnen Fällen sehr verschieden sein. Wenn es sich wie *bei Stammanalysen und bei Dauerversuchsflächen* um eine typische Zeitreihe handelt, die aus aufeinanderfolgenden Messungen an ein und demselben Objekt besteht, ist es offenbar, dass in dem so zusammengetragenen Material *die Beobachtungen nicht als untereinander unabhängig* gelten können. Ganz *besonders* ist dies der Fall, wenn die Analyse sich auf *die relativen Beträge* gründet, als deren Bezugswerte die vorermittelten Ergebnisse aus derselben Messreihe dienen. Auch wenn das Wachstum in Frage steht, werden hierbei die gleichen Zuwachsbeträge die Bestandteile mehrerer Beobachtungen ausmachen. Dagegen ist die Abhängigkeit zwischen den Beobachtungen schon von ganz anderer Art, wenn man, wie bei dem absoluten Zuwachs, die Beträge jeder Zeitperiode der Messreihe voneinander getrennt benutzt. Allerdings kann man auch dann ihre Unabhängigkeit nicht als theoretisch vollkommen erachten, aber mit gewissem Vorbehalt ist es schon dabei möglich, ihre Analyse in Gleichsetzung mit völlig unabhängigen Beobachtungen vorzunehmen.

Wenn sich die Wachstumsanalyse *auf einmalige Messungen* an einzelnen Bäumen oder temporären Probeflächen gründet, sind *die* einzelnen *Beobachtungen* auch rein theoretisch betrachtet *voneinander unabhängig*. Für diesen Vorteil muss man jedoch infolge der zwangsweise *zunehmenden Inhomogenität* des Materials wiederum andere *Nachteile* in Kauf nehmen, die für die Ergebnisse tatsächlich noch grössere Bedeutung besitzen können (vgl. z.B. LIENERT, l.c.). Ein zweiter, die repräsentative Güte eines solchen Materials vermindernder Nachteilfaktor, dessen Bedeutung man im allgemeinen nicht einmal zu schätzen imstande ist, hängt mit seiner *Auswahl* zusammen. Bei der Erhebung eines auf einmaligen Messungen aufbauenden Materials kann oder will man die Auswahl oft nicht so durchführen, dass sie den an eine Stichprobenerhebung zu stellenden Bedingungen gerecht würde (vgl. z.B. NYYSSÖNEN 1954, S. 27—30, VUOKILA 1956, S. 12—14, 1965, S. 28—30). *Die Möglichkeit eines systematischen Fehlers* muss dabei stets in Betracht gezogen werden, und zu seiner Ermittlung gibt es kaum ein Mittel. Wenn wiederum die Stichproben auf korrekter Grundlage gemacht werden, wie z. B. durch Linientaxierung mit Probeflächen, ist zwar der erwähnte Nachteil vermeidbar, dann aber muss man zumeist eine Einbusse vor allem an Homogenität des Materials, aber eventuell auch an Genauigkeit der Messungen selbst in Kauf nehmen.

14. DIE VERSCHIEDENEN ALTERNATIVEN DER WACHSTUMSANALYSE

Das Wachstum eines Baumindividuums und eines Bestands wird durch *statische* Analyse untersucht, indem man die Zuwachsbeträge gewissermassen als zeitliche »Querschnitte» einer jeden Altersphase voneinander getrennt betrachtet. Es kann aber auch *dynamisch* betrachtet werden, wobei man entweder den gesamten Wachstumsvorgang oder wenigstens einen Teil desselben als einheitliche Erscheinung behandelt. In beiden Fällen ist es gegebenerweise möglich, das Wachstum bezüglich der Einwirkung eines oder mehrerer Wachstumsfaktoren zu untersuchen.

Die **statische** Analyse des Wachstumsvorgangs ist eine *Folge der getrennten Punktschätzungen*, gewöhnlich mit der Angabe des Zuwachsdurchschnittes, der sich in anspruchsvolleren Aufgaben noch eine Schätzung des Vertrauensbereiches anschliessen kann, für verschiedene Altersphasen unter den von gegebenen Wachstumsfaktoren bestimmten Verhältnissen. Eine solche Analyse liegt ebensogut bei Durchschnitten des absoluten Wachstumsbetrags wie bei denen des relativen Betrags, der Verhältniswerte, vor; es handelt sich lediglich um verschiedene Bemessungsarten. Eine derartige Analyse kann weiter auch der Test der von verschiedenen Wachstumsfaktoren verursachten Unterschiede bezüglich ihrer Signifikanz einschliessen. Die statischen Analysen sind z.B. die bisher in der Praxis üblich gewesenen verschiedenen Ermittlungen des mittleren und Gesamtzuwachses, die sich entweder auf gewisse Gebiete, Waldbetriebe oder andere Waldgesamtheiten beziehen können. Auch können solche Analysen von verschiedenen Holzarten-, Boden- oder Altersgruppen ausgeführt werden. Wenn hierbei, wie bei verschiedenen Inventuren üblich, die Zuwachsermittlungen einer jeden zu untersuchenden Klassifikation gesondert ausgeführt werden, werden sie auf diese Weise nur *eine Reihe diskreter Erscheinungen* mit voneinander unabhängigen Teilbestimmungen *darstellen.*

In der **dynamischen** Interpretation des Wachstumsvorgangs, d.h. beim Analysieren desselben *als stetige Erscheinung*, spielt die Bemessung gewisser *Abhängigkeitsbeziehungen eine entscheidende Rolle.* Vormals kam dabei hauptsächlich der graphische Ausgleich des Beobachtungsmaterials in Frage. Heutzutage, nachdem sich die Voraussetzungen für die rechnerische Auswertung radikal verbessert haben, ist er indessen zumeist infolge der Objektivität der letzteren verdrängt worden (vgl. z.B. DITTMAR 1961, S. 464). Gewöhnlich bedient man sich gegenwärtig der *Regressionsanalyse* als Methode der dynamischen Analyse.

Je nachdem, welchen Inhalt man der Wirkung der Wachstumsfaktoren im Wachstumsmodell der Analyse gibt, kann ihre Ausführung in verschiedenen Fällen ganz verschiedenes Wesen haben. Die Art und Weise des Vorgehens wird wiederum in erster Linie von den Zielen vorgeschrieben, die man mittels der Wachstumsanalyse anstrebt.

Als den eigentlichen Ausgangspunkt für das Wesen der dynamischen Analyse kann es gelten, dass man *die Wirkung der* in der Analyse einbezogenen *Wachstumsfaktoren*, von derselben der übrigen unabhängig, *möglichst wahrheitsgemäss hervorzubringen* sucht (vgl. BERTALANFFY 1951, s. 272). Falls man diese Voraussetzung hinsichtlich eines jeden Wachstumsfaktors getrennt verwirklichen kann, dann kann man auch das ganze Wachstumsmodell so aufbauen, dass es den Verlauf des Wachstumsvorgangs in seiner Gesamtheit zuverlässig darstellt (vgl. THOMASIUS 1964, S. 720—721). Zumindest sollte dies in bezug auf denjenigen Wachstumsfaktor zutreffen, auf welchem sich die Wachstumsanalyse grundlegend aufbaut. Die Wirkung der übrigen Wachstumsfaktoren lässt sich dann leichter in befriedigender Weise analysieren, selbst wenn ihre Art im Einzelnen nicht bekannt wäre. Selbstverständlich vermehrt ihre nähere Kenntnis die Menge der Information, die aus der Analyse gewonnen werden kann, weshalb es immer angebracht ist, ihr Beachtung zuzuwenden.

Die auf der oben beschriebenen Grundlage aufbauende Analysemethode kann als ein das Wachstum **beschreibendes** Verfahren bezeichnet werden. Dieses in gewissem Sinn als *natürlich* anzusehende Prinzip, das in erster Linie dem entspricht, was einige Forscher als ein Wachstumsgesetz auslegen wollen (s. S. 21—23), hat die kennzeichnende Eigenschaft, dass man damit stets *ein zutreffendes Bild vom Verlauf des Wachstumsvorgangs in seiner Gesamtheit*, also auch ausserhalb des Beobachtungsmaterials, erhalten soll. Es ermöglicht somit auch das Ausführen einer auf der Wachstumsanalyse basierenden, zuverlässigen *Extrapolation*.

Es ist jedoch nicht immer möglich, zum Beschreiben des Wachstumsvorgangs eine Abhängigkeitsbeziehung zu finden, über deren tatsächliche Art man im Klaren wäre. Es kann auch sein, dass das der Wachstumsanalyse gesteckte Ziel überhaupt nicht die Erfüllung dieser Bedingung erfordert. Somit kann es auch zweckmässig werden, Funktionen aufzubauen, die in gewünschter Weise *den durchschnittlichen Verlauf des* in einem gewissen Beobachtungsmaterial enthaltenen *Wachstumsvorgangs* **messen** und damit die von ihm gewinnbaren Ergebnisse brauchbar für Anwendungen liefern. Da es in solchen Fällen nicht notwendig ist, über die tatsächliche Art der Wirkung der betreffenden Wachstumsfaktoren im Klaren zu sein, kann man durch Vermehren ihrer Zahl das von der Regressionsbeziehung gelieferte Bild präzisieren. Die wesentliche Schwäche eines solchen Verfahrens liegt darin, dass das von ihm gewonnene Ergebnis im Grunde nur *in dem vom Beobachtungsmaterial gegebenen Rahmen zuverlässig* ist; ausserhalb von diesem ist die Verfälschung der Ergebnisse eine in gänzlich anderer Weise zu berücksichtigende Möglichkeit als bei den das Wachstum beschreibenden Verfahren. Es versteht sich, dass man durch zweckdienliche Zusammensetzung des Beobachtungsmaterials ein solches Analyseverfahren erheblich verschärfen und damit seine Brauchbarkeit erhöhen kann, aber dies ändert natürlich nichts an seinem prinzipiellen Wesen (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 273). Strukturmässig muss man es immer als ein Vorgehen von *künstlichem* Charakter ansehen. Diese Tatsache an sich soll nicht seine Unbrauchbarkeit bedeuten. Im Schrifttum ist es jedoch namentlich vom prinzipiellen Gesichtspunkt scharf kritisiert worden. So sagt z. B. PESCHEL (1938, S. 186), der solche Funktionen formal-mathematische nennt, dass eine Funktion, die Konstanten in grosser Zahl enthält, von vornherein Verdacht erregen müsse, da ein solcher Zug den Näherungsformeln eigen ist, deren Genauigkeit mit der Zahl der Konstanten zunimmt. Ebenso ist THOMASIUS (1964, S. 722) der Auffassung, dass die Kurven der empirischen Formeln die dem Wachstumsprozess zugrunde liegenden Vorgänge nicht erklären, und dass die Bestimmung ihrer Konstanten lediglich eine Rechenaufgabe sei.

15. BEHANDLUNG DES WACHSTUMSPROBLEMS IM SCHRIFTUM

151. Statische Betrachtung des Wachstums

Das Problem des Wachstums von Bäumen und Beständen hat die Forscher schon seit langem beschäftigt. Mit fortschreitender Entwicklung der Forstwirtschaft hat die Planung der wirtschaftlichen Tätigkeit immer grössere Bedeutung erlangt. Sobald man beim Ausführen der Hiebssatzberechnungen von der Anwendung des reinen Arealprinzips abgekommen war, hat man in denselben den Zuwachs in dieser oder jener Weise berücksichtigen müssen (vgl. z.B. RICHTER 1963), was seinerseits Forschungsarbeit in bezug auf den Zuwachs vorausgesetzt hat.

Im allgemeinen hat in Untersuchungen über den Zuwachs die statische Analyse desselben dominierende Stellung eingenommen, wie auch in den neuesten Handbüchern (z.B. PETRINI 1948, SPURR 1952, ILVESSALO 1965, PRODAN 1965) aus diesbezüglichen Übersichten hervorgeht. In den Untersuchungen hat man danach getrachtet, die Beträge des Zuwachses für den Holzbestand des betreffenden Waldgebietes im ganzen oder in verschiedenen Altersklassen bzw. anderen Teilkomponenten zu ermitteln. Ferner hat man Vergleiche zwischen den Zuwachsbeträgen von Beständen an verschiedenen Standorten sowie von verschiedenem Alter oder verschiedener Struktur angestellt. Die Untersuchungen über den Betrag des relativen Wachstums wiederum sind davon ausgegangen, dass der Zuwachs von Baumindividuen und so auch von Baumbeständen einem Zinsvorgang gleichgestellt werden kann, wo die Zunahme der Holzmasse dem Anwachsen der Zinsen auf das Kapital gleichkommt (vgl. z.B. PRODAN 1965, S. 431). Man hat weiter angenommen, dass, wenn eine hinreichend kurze Zeitpriode in Frage steht, der Zuwachs annähernd nach einem festen Zinsfuss stattfindet. In diesem Teil hat sich die Forschung auch ausdrücklich auf das Ermitteln von auf einem solchen festen Zinssatz bestehenden, besonders für den Bedarf der Praxis geeigneten Näherungsverfahren konzentriert. KUUSELA (1953) hat von dieser Problemgruppe eine ausführliche Zusammenfassung gegeben. Es hat den Anschein, dass die auf diesem Wege verfügbaren methodischen Möglichkeiten schon ziemlich erschöpft sind. *Auf der Grundlage der statischen Wachstumsanalyse sind auch sonst vielleicht keine* entscheidend *neuen Resultate* mehr *zu erwarten* (vgl. WECK 1951a, S. 20).

152. Betrachtung des Wachstums als dynamische Erscheinung

1521. Das Wachstum messende Modelle

Die das Wachstum messenden, auf der Regressiosanalyse basierenden Verfahren sind insbesondere in Schweden ausgearbeitet worden, wo sie PETTERSON (1932) als erster auf ein Beobachtungsmaterial angewandt hat. In mehreren späteren Untersuchungen (u.a. PETTERSON 1937) hat er die gleiche Methodik benutzt und eingehend die Anwendung seiner Verfahren und ihre Grundlagen beschrieben. Verfahren entsprechender Art hat später auch NÄSLUND in manchen von seinen Untersuchungen verwendet, in deren einer (1944) er u.a. anschaulich die Gründe und Ansichten dargelegt hat, die zu ihrer Anwendung führten. Von den jüngeren Arbeiten ist als solche mit der gleichen Methodik ferner zumindest JONSSONS (1962) Untersuchung vom Zuwachs in Nadelmischwäldern zu erwähnen. Entsprechendermassen ist in Norwegen vor kurzem DELBECKS (1965) Untersuchung über den Zuwachs lockerbestandener Wälder erschienen, die auch Anwendungen von Wachstumsfunktionen enthält.

Das Wachstum messende Regressionsverfahren sind, wie aus dem von VUOKILA (1965, S. 18—23) dargestellten Bericht hervorgeht, auch sonstwo in Europa und gleichfalls in den Vereinigten Staaten untersucht worden. In diesen sind zur Erklärung des als abhängige Variable auftretenden Zuwachsbetrags vielerlei Wachstumsfaktoren herangezogen worden. Ihre Anzahl hat sich in verschiedenen Fällen von zwei bis auf mindestens neun (NÄSLUND 1944) belaufen.

In allerletzter Zeit hat man auch in Finnland begonnen, in Untersuchungen über den Zuwachs eine Methodik entsprechender Art anzuwenden. Als erster dürfte sich VUOKILA (1960, S. 55—58) ihrer bei seiner Untersuchung über die sibirische Lärche bedient haben. Die von ihm angegebene Funktion

$$Z = 523\ H - 22\ H^2 - 342\ G$$

kann man als ein sehr typisches Beispiel eines das Wachstum messenden mathematischen Modells ansehen, in welchem der Betrag des jährlichen Zuwachses (Z) gemäss der Prinzipien des sog. EICHHORNschen Gesetzes (vgl. ERTELD 1957, S. 424—425; s. auch ASSMANN 1961, S. 158 und WEIHE 1961b, S. 135) von der Oberhöhe (H) des Bestands und von seiner Grundfläche (G) bestimmt wird. Wachstumsfunktionen hat VUOKILA (1965) auch in seiner Untersuchung ausgearbeitet, in der an Hand von temporären Probeflächen Gleichungen für die Ertragstafeln von Kiefer ermittelt worden sind. KUUSELA und KILKKI (1963) haben ihrerseits die Grundlagen des von ihnen entwickelten Verfahrens dargestellt, das an KUUSELAS (1964) Untersuchung über die Prognose von Zuwachs und Abgang für ein grosses Waldgebiet anknüpft. Nach ihnen hängt der Zuwachs des Bestands, der bei ihnen als Zuwachsprozentsatz ausgedrückt ist, hauptsächlich vom Alter, von der Masse, der Bonität sowie von der Mittelhöhe und dem Mitteldurchmesser ab. Ihr Ziel war auch, eine Funktion zu erzielen, in der man auf das Alter als erklärende Veränderliche verzichten könnte; sie stellen aber fest, dass die Masszahl der Bonität auch dann unerlässlich ist, wenn man das Alter weglässt. Nach ihnen ist es jedoch schwierig, die Bonität objektiv abzuschätzen und quantitativ anzugeben, weil die Bemessung der Bonität im allgemeinen Kenntnis des Bestandesalters voraussetzt. Als ihre Gesamtauffassung teilen sie mit, dass das Bestandesalter und die Bestandesmasse in finnischen Verhältnissen die brauchbarsten das Wachstum erklärenden Kennwerte sind (op.c., S. 26), mit deren Hilfe man anwendbare Zuwachsprozentfunktionen für Bestandsklassen nach der herrschenden Holzart berechnen kann.

Eine gewisse Verknüpfung mit den im folgenden zur Betrachtung kommenden, das Wachstum beschreibenden Verfahren zeigt ihr Hinweis auf die Anwendungsmöglichkeiten der Wachstumsfunktionen zur Untersuchung des Wachstumsvorgangs als biologische Erscheinung. In dieser Beziehung mahnen sie jedoch zu Vorsicht; nach ihnen zeigt eine Regressionsanalyse nicht immer die Wirkung der erklärenden Variablen an sich an, da eine jede solche ihrerseits eine Funktion anderer ist (op.c., S. 30).

1522. Den Wachstumsvorgang beschreibende Modelle

Der älteste bekannte Versuch zur Beschreibung des Wachstumsvorgangs mittels einer mathematischen Funktion stammt von SPÄTH 1797, der die Exponentialfunktion zu diesem Zweck heranzog (PESCHEL 1938, S. 192). Danach sind in der gleichen Absicht zahlreiche Vorschläge gemacht worden (vgl. z.B. THOMASIUS 1964, S. 722). PESCHEL hat im Jahre 1938 eine Zusammenfassung der Ergebnisse der bis dahin erfolgten Forschung dargestellt. Da sie in grundlegender Weise eben die das Wachstum beschreibenden Verfahren behandelt, soll im folgenden seine Arbeit etwas eingehender betrachtet werden.

Der von ihm gestellten Aufgabe gemäss befasst sich PESCHEL (1938) mit dem Wachstumsvorgang auch als allgemeine biologische Erscheinung und sucht nach einer Antwort auf die Frage von der Existenz eines allgemeinen Wachstumsgesetzes. Er teilt die angegebenen Wachstumsfunktionen in zwei Gruppen ein: einerseits die rein formal-mathematischen und andererseits die besser mit seinem Wachstumsgesetzgedanken im Einklang stehenden sog. energetischen Funktionen (vgl. S. 21). Seine Auffassung zu der Frage, ob in den bis dahin erschienenen Untersuchungen das richtige Wachstumsgesetz gefunden worden war, ist verneinend, indem gegen jede vorgeschlagene Funktion stichhaltige Einwände gemacht werden können (op.c., S. 242). Es sind jedoch offenbar auch brauchbare darunter, da sich nach ihm mit manchen von ihnen schon recht vielversprechende Erfolge hatten erzielen lassen. Bemerkenswert ist der Umstand, dass er solche aus beiden seiner obengenannten Gruppen anführt. Als Schlussfeststellung sagt er (op.c., S. 243): »Wirkliche Gesetze liegen aber, wie schon betont wurde, noch nicht vor, und es muss daher vor allzu grosszügigen Extrapolationen zurzeit noch gewarnt werden».

In PESCHELS Betrachtung fällt es auf, dass er fast gänzlich diejenigen Eigenschaften der verschiedenen Funktionen übergangen hat, die die Anwendung und besonders die rechentechnische Eignung betreffen. Er richtet sein Augenmerk nur darauf, ob die Funktion prinzipiell richtig aufgebaut ist, und ob sie mathematisch einwandfreie Form besitzt. Es gelingt ihm aber nicht, völlig konsequent die von ihm dargestellten Grundsätze zu befolgen, was er mittelbar auch selbst eingesteht (op.c., S. 243, vgl. auch S. 64).

Nach PESCHELS Untersuchung ist die Ausbildung der Wachstumsfunktionen von der gleichen theoretischen Grundlage aus zumindest von MICHAJLOW (1952) behandelt worden. Nach einer kurzen Besprechung der Theorie der Wachstumsfunktionen leitet er seine eigenen Funktionsformen her und betrachtet deren Eignung als Wachstumsfunktionen. Nach PESCHELS Klassifikation handelt es sich bei der MICHAJLOWschen Funktion um eine typische formal-mathematische Funktion. Auch er führt keinerlei auf einem Beobachtungsmaterial basierende Ergebnisse zur Veranschaulichung der Anwendbarkeit seiner Wachstumsfunktionen an.

Kürzlich hat THOMASIUS (1964) eine Untersuchung veröffentlicht, in welcher er Prinzipien allgemeiner Natur über die Wachstumskurven und -funktionen bespricht. Sehr interessant erörtert er die Abhängigkeit des Wachstums von verschiedenen Faktoren (vgl. S. 9) und zum Schluss die Forderungen, die an die Wachstumsfunktionen und an die bei ihrer Erforschung anzuwendenden Verfahren zu stellen sind. Abschliessend stellt THOMASIUS fest, dass noch keine Funktion gefunden worden ist, die allen diesen Forderungen entspricht, weshalb es nicht möglich ist, irgendeiner Funktion den Namen des Wachstumsgesetzes zu verleihen. Beim Ausgleichen von Beobachtungsmaterial sind solche Funktionen jedoch zweifellos recht nützlich, es wäre aber gewagt und anfechtbar, auf ihren Grundlagen umfassende biologische und philosophische Folgerungen zu machen.

Den bisher gründlichsten Vorschlag betreffs der biologischen Wachstumsfunktionen dürfte BACKMAN (1943) in seiner Untersuchung »Wachstum und organische Zeit» gemacht haben. Er hat den Versuch unternommen, ein allgemeingültiges mathematisches Modell zur Beschreibung des Wachstums und Lebensverlaufs sämtlicher Organismen auszuarbeiten und damit das allgemeine Wachstumsgesetz in Form mathematischer Funktion anzugeben. Die von ihm dargestellten Grundsätze werden nachstehend (S. 22) näher betrachtet (vgl. auch S. 66—67). Über die Eignung seiner Funktion zum Beschreiben des Wachstums von Bäumen hat er ausserdem eine eigene gesonderte Untersuchung (1942) veröffentlicht, die jedoch dem Verfasser nicht zur Verfügung gestanden hat.

In Deutschland hat WECK (1950b, 1951a, 1953 usw.) in zahlreichen Untersuchungen Anwendung der Ideen BACKMANs auf den Wachstumsvorgang der Bäume, auch auf deren Massenwachstum, angestrebt. Da die Funktion des Wachstums zu der der Normalverteilung entsprechenden Funktionsform führt (BACKMAN 1943, S. 17), hat WECK auf dieser Grundlage den Gedanken einer auf Wahrscheinlichkeitspapier graphisch auszuführenden (vgl. DAEVES-BECKEL 1958) Wachstumsanalyse ausgesprochen. Sowohl Extrapolation der Wachstumswerte als auch Analyse des Verlaufs des Wachstums sind nach ihm auf diese Weise recht einfach ausführbar. Er betont besonders den Umstand, dass für jeden beliebigen konkreten Einzelfall das jeweils zutreffende, als Masstab geeignete Modell entworfen werden kann, an dem der in jedem Fall individuell zu erkundende und zu beurteilende Wachstumsvorgang gemessen wird (WECK 1950b, S. 605; vgl. auch ASSMANN 1961, S. 160—161). Er erachtet dies mit Recht als einen grossen Vorzug im Vergleich zu den Ertragstafeln, die sich nur selten exakt in irgendeinem konkreten Wirklichkeitsfall bewähren, indem sie ausdrücklich ein gewisses Durchschnittsniveau widerspiegeln.

WECKs an sich gute Ideen haben die Schwäche, dass sie Kenntnis des von den Bäumen erreichten Endwachstums voraussetzen, ehe seine Analysenmethode angewandt werden kann, was ausnahmslos jedoch stets nur schätzbar ist. Dies zieht seinerseits, wie SCHLETTER (1954) bemerkt hat, viele Fehlerquellen in die Analyse mit herein, und zwar bis zu dem Grad, dass die Anwendbarkeit der ganzen Methode sich wenigstens vorläufig offensichtlich fragwürdig gestaltet. Aus diesem Grunde hat man u.a. versucht, Näherungsverfahren zur Bestimmung der Konstanten von BACKMANs Funktion zu ausarbeiten (s. THOMASIUS 1962, S. 1023—1041; vgl. auch LIEBOLD 1962). Da ihre Konstanten indessen auch exakt rechnerisch bestimmt werden können (s. S. 67), lässt sich die darauf aufbauende Analyse auf diesem Wege zuverlässiger in dem vom Beobachtungsmaterial zugelassenen Rahmen ausführen.

Gedanken, die auf BACKMANs Wachstumsfunktion aufbauen, und die sich offenbar am besten zum Beschreiben des Höhenwachstums eignen, sind auch im Bereich der Pflanzenzüchtung sowohl in Deutschland (vgl. SCHLETTER 1954, S. 195) als auch in Schweden (JOHNSSON 1953) entwickelt worden, offenbar eben deshalb, weil nach derselben die Phase des am steilsten ansteigenden Zuwachses einen sehr starken Einfluss auf das gesamte Wachstum hat (vgl. OKSBJERQ 1959, S. 365—366 und THOMASIUS 1965a). Ganz kürzlich sind — in erster Linie eben auf der von BACKMAN angegebenen Grundlage — Wachstumsfunktionen rechnerisch auch beim Aufstellen von Ertragstafeln für Fichte in Bayern angewandt worden (ASSMANN-FRANZ 1965).

In seinem die forstliche Biometrie behandelnden Handbuch hat PRODAN (1961, S. 327—378) insbesondere auf der Grundlage der Arbeiten von PESCHEL, BACKMAN und WECK eine umfassende, durch zahlreiche Beispiele veranschauliche Zusammenfassung der Wachstumsfunktionen gegeben. Die neuesten diesbezüglichen deutschen Auffassungen sind auch in den Handbüchern von ASSMAN (1961, S. 199—201), ERTELD—HENGST (1966, S. 108—113) und LYR—POLSTER—FIELDER (1967, S. 379—396) enthalten.

16. ABGRENZUNG DER UNTERSUCHUNGSAUFGABE

Im Wachstumsvorgang der Baumindividuen handelt es sich selbstverständlich letzten Endes um Änderungen in ihrem Rauminhalt, weshalb auch *die Analyse ihres Massenwachstums* stets grundlegende Bedeutung haben wird (vgl. ASSMAN 1961, S. 79). Aus diesem Grunde wird in der vorliegenden Arbeit *die Betrachtung* des Wachstumsvorgangs *nur auf diesen* Aspekt *beschränkt.* Die dabei zur Darstellung kommenden allgemeinen Prinzipien sind ja auch auf das Wachstum seiner Teilkomponenten anzuwenden (vgl. z.B. WEIHE 1961b, S. 133 und THOMASIUS 1964, S. 716—719).

Der Untersuchung wird von den verschiedenen Alternativen der Wachstumsanalyse *die Betrachtung der das Wachstum beschreibenden Verfahren* zur Aufgabe gestellt, und auch hierin nur in scharf umrissenen Rahmen. Trotz des von den verschiedenen Vergleichsmöglichkeiten gebotenen Interesses hat der Verfasser eine solche Einschränkung als zweckmässig erachtet.

Die bisherigen das Wachstum beschreibenden Verfahren betreffen ausschliesslich Funktionen, die sich auf den absoluten Betrag des Wachstums beziehen. Da jedoch namentlich vom Standpunkt der Prognoseaufgaben *die relativen Wachstumswerte* besonders grosse Bedeutung für die praktische Forsteinrichtung haben, wird *in dieser Untersuchung* versucht, dieser Seite der Wachstumsanalyse *besondere Beachtung zuzuwenden*, welche in den das Wachstum messenden Verfahren bereits einen bemerkenswerten Rang erreicht hat. Bei der Betrachtung der den absoluten Betrag des Wachstums beschreibenden Funktionen wird man ja in erster Linie nur von der Beurteilung der Anwendbarkeit der verschiedenen Alternativen in der Wachstumsberechnung ausgehen. So wird im wesentlichen *nur eine Zuwachsfunktion* unter den zahlreichen zu Gebote stehenden Alternativen *angewandt*, die sich nach Auffassung des Verfassers am besten zu diesem Zweck eignet.

Die Untersuchung ist im Grunde *auf die Klärung der methodologischen Seite der Wachstumsanalyse konzentriert.* Dieser Ausgangspunkt setzt eine ziemlich eigehende Betrachtung der theoretischen Grundlagen der Wachstumsfunktionen voraus, damit ihre methodologische Beurteilung in zuverlässiger Weise geschehen könnte. Der gleiche Ausgangspunkt bewirkt auch, dass in der Untersuchung *zuerst der normale Verlauf* des Wachstumsvorgangs *gesondert betrachtet* wird. Erst *im Anschluss daran erfolgt* die Interpretation der *Analyse der Abweichungen* von diesem normalen Verlauf bezüglich ihrer Ursachen und Bedeutung. Die *gleichen* Funktionsformen, die sich beim Beschreiben des normalen Wachstumsvorgangs als zweckmässig erweisen, sind ja im allgemeinen mit geeigneten methodischen Mitteln auch *zum Analysieren* davon *abweichender Wachstumsprozesse* anzuwenden (vgl. WECK 1950b, S. 589—594 und BERTALANFFY 1951, S. 273).

In der vorliegenden Untersuchung wird gleichfalls besonders versucht, im Auge zu behalten, dass auch *die letzterwähnte Problemgruppe*, die im Erforschen der das Wachstum beschreibenden Funktionen in der Tat im grossen Ganzen beiseitegelassen worden zu sein scheint, *eine ihrer Bedeutung entsprechende Stellung* erlangen wird. Im Zusammenhang mit den das Wachstum messenden Verfahren hat sie schon ihrem Charakter zufolge mehr Beachtung gefunden.

Auch den Methoden, die beim Vergleichen der Wachstumsfunktionen untereinander und beim Prüfen ihrer Eignung angewandt werden können, ist im Zusammenhang mit den das Wachstum beschreibenden Verfahren bisher keine nennenswerte Beachtung geschenkt worden, obwohl ihre Bedeutung schon anerkannt worden ist (z.B. WECK 1950a), und in Verbindung mit den das Wachstum messenden Methoden hat man sie ja auch berücksichtigt (z.B. NÄSLUND 1944, KUUSELA-KILKKI 1963). Es ist auch offenbar, dass die Veranschaulichung von theoretisch entwickelten Wachstumsfunktionen bloss aufgrund einzelner Beispiele noch nicht zu brauchbaren Ergebnissen führt, sondern *man muss* zugleich *nach Mitteln suchen, mit denen die* verschiedenen *Funktionsformen* untereinander *beurteilt* und ihre Eignungsgebiete objektiv festgelegt *werden können*. Dies führt naturgemäss dahin, dass die mathematisch-statistischen Analyseverfahren in genügend weitem Rahmen auch in der Forschung des Wachstumsvorgangs der Bäume eine ausschlaggebende Stellung erlangen werden (vgl. z.B. PRODAN 1951, S. 80, DITTMAR 1961, S. 464 und ASSMANN-FRANZ 1965, S. 38—39).

Anschliessend wird in der Untersuchung Demonstrationsmaterial passender Art beinhaltet und an Hand von diesem eine Anzahl von Analyseergebnissen (bezeichnet mit *Dem.B.*) vorgelegt. Diese und ihre Betrachtung werden nur im Sinne von Beispielen für die Veranschaulichung der methodologischen Fragen mit aufgenommen. Hierbei wird ausdrücklich versucht, die verschiedenen Ausführungsmöglichkeiten der Wachstumsanalyse sowohl bezüglich des einzelnen Baumindividuums als auch des Bestands zu beleuchten. Dagegen heben sie in keiner Weise irgenwelche gewissen mathematisch-statistischen Methoden bezüglich ihrer Anwendungsfähigkeit hervor.

2. DIE ALLGEMEINEN GRUNDLAGEN DER MATHEMATISCHEN WACHSTUMSANALYSE

21. DIE ALLGEMEINEN EIGENSCHAFTEN DER WACHSTUMSFUNKTIONEN

211. Der biologische Charakter der Wachstumsfunktionen

Die den biologischen Wachstumserscheinungen innewohnenden Gesetzmässigkeiten in die Form eines Wachstumsgesetzes zu kleiden, hat die Forscher schon seit langem gefesselt, und im Laufe der Zeit sind für dieses Problem mannigfache Lösungsvorschläge gemacht worden (vgl. z.B. RICHARDS-KAVANAGH 1947, S. S. 191). Auch die prinzipielle Betrachtung der Frage hat man viel diskutiert (vgl. z.B. REEVE-HUXLEY 1947 und BERTALANFFY 1951, S. 269—271). In Untersuchungen betreffs des Wachstums der Bäume ist die Frage ebenfalls von diesem gewissermassen wachstumsphilosophischen Aspekt ausgehend erörtert worden.

PESCHEL (1938, S. 208) führt als Ausgangspunkt für seine energetischen Wachstumsfunktionen, deren Benennung vermutlich auf eine gewisse Zielbewusstheit der als Grundlage des Wachstumsprozesses auftretenden Wuchskraft hindeuten soll, die Auffassung an, dass ein und dasselbe Wachstumsgesetz ebensogut im einfacheren wie auch im kompliziertesten Organismus zutage tritt. Deshalb muss versucht werden, die einfachsten uns bekannten Wachstumserscheinungen von gewissen physikalischen und energetischen Grundlagen ausgehend zu erklären. Wir können dann erwarten, dass eine solche Erklärung auch sonstwo stichhaltig ist. Das Wachstum hat seine Grundlage in einer besonderen Kraft, der Wuchskraft, mit der sich wiederum auch ein ihr entgegenwirkender Kräftekomplex verknüpft, den er Hemmung benennt. Nach PESCHEL kann man die Wachstumsfunktionen herleiten, indem man Hypothesen auf Grund entweder der Wirkung der Wuchskraft allein oder auf der gemeinsamen Wirkung der Wuchskraft und der Hemmung aufbaut. Nach seiner Auffassung (op.c., S. 243) kommt bei derartigen Forschungen den energetischen Betrachtungen auf jeden Fall ein grösserer Wert zu als den blossen formal-mathematischen Konstruktionen. Über den Charakter der Wachstumsgesetze sagt er (op.c., S. 176): »Das Wachstumsgesetz gibt dann also nur den durchschnittlichen Wachstumsgang wieder, um den herum, scheinbar durch Zufall gestreut, die einzelnen Individuen pendeln.» Er betont zugleich die starke Stochastizität der Beziehung zwischen einzelnen Beobachtungen und Beobachtungsreihen und dem Wachstumsgesetz. Betreffs der Existenz eines solchen legt PESCHEL schliesslich (op.c., S. 243) seine Überzeugung vor, dass ein allgemeingültiges Gesetz waltet, und dass es nur eine Frage der Zeit ist, bis es gelingt, dieses Gesetz in eine mathematische Form zu bannen. Nach seiner Auffassung wären in Untersuchungen, die sich mit der Ermittlung des Wachstumsgesetzes befassen, ausser der Ertragskunde auch andere Wissenschaftszweige, vor allem die Physiologie heranzuziehen.

Im wesentlichen an PESCHELS Ansichten anknüpfend erachtet THOMASIUS (1964), dass, obgleich viele Einzelvorgänge noch ungeklärt sind, der Versuch einer mathematischen Interpretation schon heute gerechtfertigt sei. Nach seiner Auffassung ist zu vermuten, dass gewisse gemeinsame Züge der Wachstumskurven Ausdruck eines allgemeingültigen Gesetzes sind, obgleich bishin eine solche Funktion, für welche die Benennung »Wachstumsgesetz» gerechtfertigt wäre, noch nicht erdacht worden ist. Seine Existenz legt jedoch den Versuch einer mathematischen Formulierung nahe. Es hat aber einen deutlichen stochastischen Charakter.

Dagegen BACKMAN (1943), der in seinen umfangreichen Untersuchungen selbst die Eignung seines Wachstumsgesetzes für die verschiedenartigsten Lebewesen betrachtet hat, sagt als Gesamteindruck seiner Ergebnisse (op.c., S. 5): »So bin ich berechtigt, diese meine Wachstumsfunktion als die biologische Wachstumsfunktion zu bezeichnen, die einzige die zur Zeit besteht.» Er gibt (op.c., S. 4) folgende Auffassung vom Verlauf des Wachstumsvorganges: »Die graphische Form eines Wachstumszyklus ist eine schiefe S-Kurve, so beschaffen, dass das Erreichen des halben Endwertes stets nach dem Erreichen der grössten Geschwindigkeit, aber früher als in der Lebensmitte eintritt.» Der diesem Zyklus zugehörige Geschwindigkeitsverlauf hat eine asymmetrische Glockenform, so dass das Abklingen der Geschwindigkeit sich über eine längere physikalische Zeitspanne als das Ansteigen ausdehnt. BACKMAN wendet in seinem Wachstumsgesetz einen besonderen Zeitbegriff an, den er die »organische Zeit» nennt (BACKMAN 1939, S. 35—40). Hinter diesem Gedanken steht die allgemeine menschliche Erfahrung, dass »dem Kinde der Tag viel länger als im Alter ist», d.h. dass die Zeit in den verschiedenen Altersphasen des Lebewesens grundverschiedene Bedeutung hat. Gewisse Werte der organischen Zeit belegt er mit besonderer Bedeutung als Grenzpunkte der Lebensquanten der Organismen (s. S. 61). Nach BACKMANS Ansicht setzt sich das Wachstum der Lebewesen aus mehreren Zyklen zusammen, die teilweise auch gleichzeitig auftreten und deren jeder bezüglich seiner Entwicklung gewissermassen eine eigene Wachstumsfunktion vertritt. Bei Bäumen hat er drei Phasen unterschieden (vgl. auch PRODAN 1961, S. 334 und THOMASIUS 1962, S. 1042—1043), von denen jedoch zwei in das allererste Anfangsstadium des Wachstumsvorgangs fallen, so dass sie keine wesentliche Bedeutung im Gesamtbild des ganzen Wachstumsvorgangs mehr haben.

ASSMAN (1961, S. 199—201) seinerseits zweifelt an der Existenz eines allgemeingültigen Wachstumsgesetzes und zieht es vor, von einer Wuchsgesetzmässigkeit zu sprechen. Nach seiner Auffassung bietet jedoch die in den Wachstumsfunktionen gegebene mathematische Formulierung grosse Vorteile, denn sie ermöglicht eine gedrängte Ausdrucksweise und gestattet mittels der Methoden der mathematischen Statistik eine Prüfung ihrer Signifikanz.

Wenigstens bis auf weiteres erscheint es auch unwahrscheinlich, dass für das tatsächliche Wachstumsgesetz in dem Sinn, wie man ein Gesetz bei physikalischen Erscheinungen versteht, ein so einfaches mathematisches Modell auffindbar wäre, dass man es mit menschlichen Mitteln beherrschen könnte (vgl. z.B. OKSBJERG 1959). Aber *vom Standpunkt der Aufgabe ist es* letzten Endes *von untergeordneter Bedeutung*, ob eine rein praktische Approximation in Frage steht, sofern sie nur anhand einer auf richtigen Grundlagen fussenden Hypothese aufgebaut ist, oder aber ein wirkliches Wachstumsgesetz. *Entscheidend ist, dass die in dem Beobachtungsmaterial enthaltene Information* mit ihrer Hilfe *möglichst effektiv verwertet werden kann.* Von diesem Gesichtspunkt betrachtet ist es ausschlaggebend, dass das in Anwendung gebrachte Modell möglichst gut den tatsächlichen Verlauf des Wachstumsvorgangs im Ganzen wiedergibt. Es erscheint daher zweckmässig, dass man im Einklang mit ASSMANN von der Wachstumsfunktion statt der Aufgabe eines Wachstumsgesetzes nur verlangt, dass sie die Gesetsetzmässigkeiten des Wachstumsvorgangs beschreibt. Im biologischen Wachstumsvorgang handelt es sich dann haupsächlich um stochastische Zusammenhänge, in denen stets verschiedenartige Störungsfaktoren von den Gesetzmässigkeiten eine mehr oder weniger loslösende Wirkung ausüben. Der biologische Wachstumsvorgang gestaltet sich demzufolge zu einer äusserst komplizierten Ereignisfolge, die in ihren Einzelheiten schwerlich jemals beherrschbar sein wird (vgl. z.B. ASSMANN 1961, S. 199). *Die Wachstumsfunktion behält* somit nur *die Aufgabe, die Hauptzüge des Wachstumsvorgangs zu beschreiben.*

Die Eigenschaften, welche die Wachstumsfunktion haben soll, damit sie ihren Zweck erfüllen kann, hat vom allgemeinen biologischen Standpunkt u.a. BERTALANFFY (1951, S. 271—275) betrachtet. Er hält mathematische Methoden, in der Biologie zum unentbehrlichen Rüstzeug gehörend, für Mittel zur kausalen Analyse und zur Aufstellung exakt formulierter Gesetzmässigkeiten, was erst die betreffenden Erscheinungen zu einem exakten System macht, soweit ein solches auf biologischem Gebiete möglich ist. Doch hat nach ihm solche mathematische Formulierung überhaupt nur dann biologischen Sinn, wenn sie uns eine Einsicht in die ursächlichen Grundlagen des Wachstumvorgangs vermittelt. Daher ist befriedigende Approximation der empirischen Beobachtungen eine notwendige, aber keineswegs ausreichende Bedingung, um eine mathematische Formulierung als rational bezeichnen zu dürfen. Somit wird eine an sich »richtige» Funktion unvermeidlich in gewissen Fällen mangelhaftes Zutreffen erhalten. Der Wert einer Formulierung ist nur durch physiologische bzw. biologische Erwägungen zu beantworten. Die angenommene Gesetzmässigkeit muss immer von physiologisch bzw. biologisch plausiblen und prüfbaren Voraussetzungen über die Grundlagen des Wachstumsvorgangs ausgehen. Der wichtigste Beweis für ihre Richtigkeit ist gegeben, wenn sie auf von der mathematischen Darstellung unabhängigen Wegen bestätigt wird, und aus ihr möglichst viele Konsequenzen abzuleiten sind, die direkt in unabhängigen Versuchen verifiziert werden können.

Ohne Zweifel verhält es sich auch so, dass die von BERTALANFFY dargestellten Gesichtspunkte der Wachstumsfunktion die Bedeutung garantieren, die sie besonders im Hinblick auf Prognoseberechnungen haben soll. In seiner Fassung von den Eigenschaften der tatsächlichen Wachstumsfunktion ist wesentlich, dass diese sowohl *eine thereoretisch richtige, aber* zugleich *möglichst einfache Form* hat und auch fähig sein soll, genügend *gute Approximation mit dem empirischen Material* zu bewirken. Je besser eine Funktion diese beiden Bedingungen erfüllt, umso besser entspricht sie auch den an die Wachstumsfunktion zu stellenden Anforderungen.

212. Das Wesen der Wachstumsfunktionen vom mathematisch-statistischen Gesichtspunkt

Im allgemeinen Sinn ist die Wachstumsfunktion ein mathematisches Modell, das die Aufgabe hat, die von einer gegebenen Menge von Wachstumsvorgängen vertretene Wachstumserscheinung, sowohl ihren Verlauf als auch die damit verknüpften Wirkungsbeziehungen, zu beschreiben (vgl. z. B. LUDWIG 1929, S. 735—739). Ausser auf den biologischen Wachstumsvorgang kann man eine solche Wachstumsfunktion auch auf viele andere, sogar gänzlich andersartige Wachstumserscheinungen anwenden, z. B. im Bereich der wirtschaftlichen oder technischen Tätigkeit. Alle haben sie als gemeinsamen Zug nur eine erforderliche Gesetzmässigkeit des Wachstumsprozesses.

Aus der Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann *der Wachstumsvorgang der Bäume* — wie auch biologische Wachstumsvorgänge überhaupt — als *ein stochastischer Prozess* gedeutet werden (vgl. TALLIS 1968, S. 169), *der eine Zufallsfunktion betrifft* (vgl. FISCZ 1958, S. 228—229). Die durch *Beobachtungen* ermittelten konkreten Wachstumsvorgänge wiederum kommen als *seine Realisierungen* zum Vorschein. Sie können entweder betreffs einzelner Baumindividuen oder auch von solchen gebildeter Populationen festgestellt werden. *Für einen* gewissen *Wachstumsvorgang* im Ganzen *werden sie als* **Wachstumsfunktionen** *konstatiert*, die auf Grund einer Menge von einzelnen Wachstumsbeobachtungen geschätzt werden und damit *Schätzungen der* entsprechenden *Zufallsfunktion darstellen* (vgl. JAGLOM 1959, S. 3). *Für einen festen Zeitpunkt* des betreffenden Wachstumsvorgangs repräsentiert die ermittelte Wachstumsbeobachtung die *Realisierung der* entsprechenden *Zufallsgrösse* (vgl. op. c., S. 6). Eine Zufallsfunktion und ihre Zufallsgrössen gelten somit für die *Erwartungsfunktion* bzw. *-werte* der entsprechenden, konkret beobachteten Wachstumswerte und der auf Grund dieser geschätzten Wachstumsfunktionen.

In der Tat ist jeder biologische *Wachstumsvorgang* jedoch als Gesamtheit *mit* allen darauf einwirkenden *Wachstumsfaktoren* immer ein äusserst vielfältiger und verwickelter *Komplexprozess, in dem* unabsehbar *viele Teilprozesse enthalten* sind (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 271). Jeder von diesen repräsentiert im Prinzip seinen eigenen, getrennten, im allgemeinen aber von anderen nicht unabhängigen stochastischen Prozess. Im Rahmen der faktisch gewinnbaren Beobachtungsgenauigkeit ist es jedoch nur teilweise möglich, dieselben voneinander getrennt zu halten. Die Spektralzerlegung des vom Wachstumsvorgang gebildeten Totalprozesses, d.h. die Auseinandersetzung seiner Struktur (vgl. JAGLOM 1959, S. 28) besitzt indessen erstrangige Bedeutung für die Deutung des Wachstumsvorgangs und für sein Analysieren. In je grösserem Mass dies gelingt, umso besser kann man die in dem betreffenden Beobachtungsmaterial enthaltene Information verwerten und die verschiedenen Mittel der Theorien stochastischer Prozesse jeweilig ausnutzen.

Die Gesamtheit der Wachstumsvorgänge von dem jeweils der Betrachtung

unterzogenen Typ bildet eine Grundgesamtheit, d.h. diejenige *hypothetische*, unendliche **Totalpopulation,** für die die betreffende Zufallsfunktion als ihre Erwartungsfunktion der aus dieser Population geschätzten Wachstumsfunktionen gilt. Diese Zufallsfunktion muss diejenigen Bedingungen erfüllen, welche beim Aufstellen des betreffenden Modells hinsichtlich der Wirkungsbeziehungen gestellt werden. In jeder Totalpopulation ist eine im Prinzip beliebige Menge von **Teilpopulationen** enthalten. Eine jede von diesen enthält eine abzählbare Menge von *konkreten* Wachstumsvorgängen, die sowohl *lokal* als auch *zeitlich* untereinander *getrennt* sein können. Sie ergeben sich *nach hierarchischen Stufen geordnet* infolge der Unterschiede, die *vor allem durch* regionale *Umweltfaktoren verursacht* sind. Als ihre typische Erscheinungsform gilt der Bestand, der ja in der Hierarchie die niedrigste Stufe darstellt (vgl. ERTELD—HENGST 1966, S. 82). Zugleich können sie jedoch auch Teilpopulationen von *verschiedener Art* (z.B. holzartenweise) ausmachen, die in diesem Fall ihrem Wesen nach gleich der Totalpopulation *hypothetische* Gebilde darstellen.

Als Grundmechanismus dieses stochastischen Prozesses wirkt *ein eng zeitgebundener Teilprozess, der den* im Wachstumsvorgang enthaltenen *Trend beschreibt.* Dieser Prozess *hat einen evolutionären Charakter* (vgl. BAILEY 1964, S. 4), indem *die Zufallsgrössen* der Zufallsfunktion eine *von* einem festen *Ausgangspunkt* in der Zeitachse *abhängende Verteilung haben.* In diesem Grundprozess des Wachstumsvorgangs, in seinem **Trendprozess,** wirken alle diejenigen Wachstumsfaktoren mit, die auf die Wachstumsgeschwindigkeit des Wachstumsvorgangs (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 276), seinen Grundverlauf bestimmend einwirken. Alle *anderen Teilprozesse machen* den anderen Hauptteilprozess des Wachstumsvorgangs aus, welcher sich als ein gewisser **Störungsprozess** *in Bezug auf den Trend* des Wachstumsvorgangs, *als Abweichungen von seinen Werten* geltend macht. Seine Teilprozesse sind ihresteils *bezüglich der Zeit homogen*, so dass ihre Werte keine Korrelation mit dem Alter haben. Sie können jedoch mit anderen Wachstumsfaktoren korrelieren (*systematische Variation*), aber auch ganz unkorreliert erscheinen (*zufällige Variation*). Man kann folglich sagen, dass *das Wachstum im* evolutionären *Trendprozess* so enthalten ist, *wie es in dem* von den gleichmässig wirkenden Wachstumsfaktoren bestimmten *Idealzustand stattfinden würde* (vgl. SCHLÄTTER 1954, S. 194, WECK 1951b, S. 135), während wieder *im Störungsprozess* die im tatsächlichen Wachstumsvorgang stets auftretenden, *Abweichungen* von diesen Idealzustand verursachenden Wachstumsfaktoren *zum Ausdruck kommen.*

Jeder Wachstumsvorgang ist einmalig und kann sich somit nie identisch wiederholen. Diese Einwirkung der absoluten Zeit im Wachstumsvorgang ist jedoch offenbar nur scheinbar, eigentlich von anderen Wachstumsfaktoren verursacht. Der wirkliche Einfluss der Zeit, *ihre systematische Wirkung*, die *den allgemeinen Verlauf des Trends* einer jeden Totalpopulation *bestimmt*, zeigt sich derart relativ, dass der Wachstumsvorgang eines jeden dazugehörigen Individuums und einer jeden Population von einem gegebenen Zeitpunkt seines Ausgangs an beginnend eine Entwicklungsreihe bewirkt, deren Endpunkt wiederum den Todeszeitpunkt des Individuums bzw. der Population ausmacht. Der *von dem Zeitpunkt des* besagten *Ausgangs gemessene Zeitabstand* kann in jeder Phase dieser Entwicklungsreihe als das betreffende **Alter** des Individuums bzw. der Population ausgelegt werden. Diese *Wirkung der Zeit an sich* ist *nicht* als *stochastisch* anzusehen, indem sie sich im Rahmen einer gegebenen Totalpopulation konstant identisch wiederholt.

Die stochastische Einwirkung auf den Trendprozess des Wachstumsvorgangs üben eigentlich *diejenige statischen*, regelmässig wirkenden *Wachstumsfaktoren* aus (s. S. 36), *die* in einer jeden Teilpopulation *den Rhythmus des Wachstumsvorgangs*, d.h. die Lage seiner Phasestellen, *und sein quantitatives Niveau bestimmen*. Diese *verleihen dem Trend seinen stochastischen Charakter* (vgl. QUENOUILLE 1957, S. 54—57). Ihre Wirkung tritt in den Parametern der Erwartungsfunktionen hervor, die somit auch *Zufallsgrössen* sind (vgl. JAGLOM 1959, S. 7) und ihrerseits die Parameter der betreffenden Zufallsfunktion als ihre Erwartungswerte haben. Weiter sind die Parameter einer jeden Wachstumsfunktion ihre Realisierungen, die von den entsprechenden Parametern der übrigen Wachstumsfunktionen unabhängig sind. Dagegen ist es für das Wesen des Wachstumsvorgangs charakteristisch, dass *die Parameter* ein und derselben Zufallsfunktion *eine gewisse Gesamtheit bilden*, so dass *zwischen ihnen* im allgemeinen offenbar enge *Abhängigkeitsbeziehungen bestehen*. Diese Beziehungen scheinen solcher Art zu sein, dass sich die Parameter des Rhythmus in gegenseitiger Korrelation bestimmen, die das Niveau bemessenden Parameter wiederum unterstellt in Regression von diesen (vgl. *Dem.B. 103, 105)*.

Der andere Hauptprozess des Wachstumsvorgangs, sein *Störungsprozess*, ergibt sich gegebenerweise als *Komplexprozess* durch Zusammenwirken sehr vieler getrennter Teilprozesse. Diese können ihresteils einen *systematischen Einfluss* haben und evolutionär einen gewissen Trend nach einem anderen Wachstumsfaktor als das Alter besitzen. Anderseits können sie sich *als stationäre Prozesse* (vgl. JAGLOM 1959, S. 8) ergeben oder nur eine Wirkung *von rein zufälliger Natur* haben. Es ist jedoch durchaus nicht immer möglich, die systematischen Teilprozesse des Störungsprozesses gesondert hervorzubringen. Ein Teil derselben bleibt in der Tat stets bei der Wachstumsanalyse lediglich in der Zufallsvariation enthalten. Man kann sogar genötigt sein, oder es sonst als zweckmässig erachten, in einer Wachstumsanalyse den Störungsprozess in seiner Gesamtheit als reine Zufallsvariation der Berücksichtigung zu überlassen. *Gesondert* wiederum wird *die systematische Variation* im Wachstumsfunktionsmodell *mittels* gegebenen *unabhängigen Variablen mitgenommen*.

Man kann voraussetzen, dass die Zufallsfunktion mit den Erwartungsfunktionen der Wachstumsfunktionen in verschiedenen Teilpopulationen im Rahmen ein und derselben Totalpopulation *ein hierarchisches System* ausmacht, das sich auf die Erwartungsfunktion bezüglich dieser Totalpopulation, d.h. auf die Zufallsfunktion gründet. Diese ist ihrem Charakter nach rein hypothetisch, und als ihre konkreten Realisierungen treten die beobachteten Wachstumsfunktionen

von verschiedenen Stufen der Hierarchie auf. Aber man kann auch in den Teilpopulationen, welche reelle Verkorperungen aus der hypothetischen Totalpopulation ausmachen, die Erwartungsfunktionen ihrer Wachstumsfunktionen für Parallelitäten gewisser Art der betreffenden Zufallsfunktion und ebenfalls die Erwartungswerte der beobachteten Wachstumswerte für Entsprechungen ihrer Zufallsgrössen halten, weil sie auf Grund der Beobachtungen nur geschätzt werden können. Endpunkte dieser Erwartungsfunktions- und Wachstumsfunktionsreihe bilden die Wachstumsfunktionen der einzelnen Baumindividuen. Ein jedes von diesen hat aber auch der Stochastizität des Beobachtens zufolge seine eigene Erwartungsfunktion. Damit *besteht* also sowohl *zwischen Wachstumsfunktionen mit ihren Erwartungsfunktionen und der betreffenden Zufallsfunktion* einer jeden Totalpopulation, von denen der Baumindividuen aufwärts, *ein enger Zusammenhang*. Davon, in welchem Mass die Beschaffenheit dieses Zusammenhangs ermittelt werden kann, hängt jeweils in entscheidender Weise die Zuverlässigkeit ab, mit welcher sich die betreffenden Wachstumsfunktionen schätzen lassen.

Es ist natürlich, dass eine jede Erwartungsfunktion hinsichtlich ihrer hierarchischen Stufe ihren Realisierungen entsprechen muss. Hieraus folgt, dass die Erwartungsfunktion bezüglich der Baumindividuen in ihren Grundeigenschaften diesen entspricht, und somit eigentlich die Erwartungsfunktion ihres Mittels, d.h. des Mittelstammes der betreffenden Population repräsentiert. Ein entsprechendes Prinzip gilt auch für alle Teilpopulationsstufen. So handelt es sich z.B. hinsichtlich der Bestände um die Erwartungsfunktion des »Mittelbestands». Der *Übergang zur Wachstumsfunktion* einer Population *höherer Stufe* erfolgt erst über dieses Mittel, was jedoch *nur eine Änderung im Niveau* des Wachstumsvorgangs bedeutet. Man muss begreiflicherweise voraussetzen, dass der *Rhythmus* des Wachstumsvorgangs selbst *unverändert bleibt*. Eben hier kommt das Wesen der Beziehungen zwischen den Wachstumfunktionen und ihren Parametern in verschiedenen Teilpopulationen recht anschaulich zum Ausdruck.

213. Die mathematischen Eigenschaften einer Wachstumsfunktion

Vom Standpunkt der nachstehenden Darstellung wird vorausgesetzt, dass die Wachstumsfunktion den Charakter einer stetigen Funktion hat, aber analog können entsprechende Schlüsse auch gezogen werden, wenn der Wachstumsvorgang in der Form einer diskreten Funktion betrachtet wird.

Die Wachstumsfunktion kann als *Summenfunktion* gedacht werden, *die monoton* unter der Wirkung der Zeit oder eines anderen Faktors in gewisser Abhängigkeitsbeziehung dazu *wächst*. Nimmt man an, dass dieser Faktor, eine gegebene stetige Variable x, die zweite stetige Variable y beeinflusst, dann gibt der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Wachstumsgeschwindigkeit der Variablen y in der Beziehung zur Variablen x wieder. Es ist stets möglich, einen solchen Differentialquotienten in Gestalt einer allgemeinen Funktion darzustellen, entweder durch

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{28.1}$$

was derart gleichbedeutend ist, dass die Wachstumsgeschwindigkeit in jedem Zeitpunkt nur von der Wirkungskraft der auf sie einwirkenden Variablen in diesem Zeitpunkt abhängt und demzufolge namentlich *dem primären Wachstumsfaktoren* einen *Ausdruck gibt.* In der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{28.2}$$

bringt sie ihrerseits den wesentlichen *Inhalt* des Prinzips *des sekundären Wachstumsfaktors vor* (vgl. S. 33). In dieser Darstellung ist nämlich der Betrag der Wachstumsgeschwindigkeit, ausser von der darauf einwirkenden Variablen (x), auch von der Grösse der abhängigen Variablen (y) im Zeitpunkt der Wirkung abhängig, und als Funktion der Erscheinung selbst kommt der sekundäre Wachstumsfaktor charakteristisch hervor.

Diese Funktionen, die vom *absoluten* Betrag der Wachstumsgeschwindigkeit ausgehen, können auch durch die logarithmische Funktionsform

$$\frac{d(\log y)}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = f(x|x,y) \tag{28.3}$$

ersetzt werden, in der die Wachstumsgeschwindigkeit *relativ* zum Betrag des erreichten Wachstums zur Berücksichtigung kommt.

Aus den obigen Funktionsformen (28.1—3) erhält man durch Integration die Summenfunktionsform, d.h. die Wachstumsfunktion selbst.

Die Wachstumsgeschwindigkeit kann selbstverständlich simultan in Abhängigkeit auch von mehreren auf die wachsende Variable (y) einwirkenden Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gestellt werden. Die Wachstumsgeschwindigkeit infolge einer einzelnen, auf den Wachstumsvorgang einwirkenden Variablen gibt dann die partielle Ableitung der Wachstumsfunktion nach der betreffenden einwirkenden Variablen an.

Diese allgemeinen Eigenschaften der Wachstumsfunktion können beim Ausarbeiten einer geeigneten Form für die Wachstumsfunktion herangezogen werden. In gewissen Fällen kann es nämlich leichter sein, den Charakter der Änderung des Wachstumsvorgangs zu erkennen, als unmittelbar eine Form für die ihn beschreibende Summenfunktion auszudenken, und auf diesem Wege eine brauchbare Form für die Wachstumsfunktion zu entwickeln.

An Hand der allgemeinen Eigenschaften der Wachstumsfunktionen kann man andererseits ihren allgemeinen Verlauf untersuchen und damit sicherstellen, dass sie auch in formaler Hinsicht den an die Wachstumsfunktion zu stellenden Anforderungen entsprechen. So lässt sich leichter vermeiden, dass man zur unrealistischen Interpretation des Beobachtungsmaterials kommt. In erster Linie kommen beim Betrachten des konsequenten Verlaufs der Wachstumsfunktion

die von der ersten Ableitung (y') der Funktion bestimmte Phase maximalen Wachstums und entsprechendermassen die Inflexionspunkte, für welche ihre zweite Ableitung (y'') massgebend ist, sowie auch die Grenzwerte, d.h. die Ausgangs- und Endphasen des Wachstumsvorgangs in Frage (vgl. auch MICHAJLOW 1952, S. 370—371).

214. Über die an die Wachstumsfunktionen zu stellenden mathematischen Anforderungen

PESCHEL (1938) teilt die Wachstumsfunktionen nach der Art ihres Ausarbeitens in zwei Gruppen ein: die formal-mathematischen und die auf der energetischen Anschauungsweise aufbauenden, von welchen die letzteren eigentlich seinem Begriff der Wachstumsfunktion entsprechen. Von den ersteren sagt er (op.c., S. 185—186), dass eine grosse Zahl von Forschern mit Vorbedacht das Aufstellen einfacher Wachstumsfunktionen vermieden hat, in der Vorstellung, die Gesetzmässigkeiten im Wachstumsprozess lägen in so komplizierter Form vor, dass ihre genaue Kenntnis keine praktische Bedeutung hätte, weshalb die Forschung sich damit begnügen soll, empirische, formal-mathematische Näherungsfunktionen anzugeben (vgl. auch BERTALANFFY 1951, S. 273). Als seine eigene Auffassung darüber, in welcher Form ausdrücklich die mathematische Beschreibung des Wachstumsvorgangs eines Baumindividuums und eines Baumbestandes erfolgen sollte, sagt er wieder (op.c., S. 184—185): »Ganz besonders zu betonen ist, dass das Wachstumsgesetz für die gesamte Lebenzeit des Baumes oder Bestandes gültig ist und nicht nur für einen mehr oder weniger grossen Ausschnitt; denn wir müssen von einem Wachstumsgesetz fordern, dass es sich nicht nur zur Interpolation, sondern auch zur Extrapolation eignet.» Gleich THOMASIUS (1964, S. 721) erachtet PESCHEL ferner, dass eine vom mathematischen Standpunkt brauchbare analytische Formel die wesentlichen Züge der Wachstumskurve aufweisen soll, vor allem alle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.

Vom mathematischen Standpunkt kann man denn auch davon ausgehen, dass die das Wachstum beschreibende Funktion möglichst gut wenigstens den folgenden auch allgemeiner anwendungsfähigen Anforderungen genügen sollte (vgl. auch THOMASIUS, op.c., S. 722):

1. Die Funktion soll möglichst *einfache Form* haben.
2. Die Funktion soll möglichst genau die *Verteilung* empirischer Beobachtungen *wiedergeben.*
3. Die Funktion soll hinsichtlich ihres Strukturprinzips demjenigen *Vorgang entsprechen,* zu dessen Beschreibung sie bestimmt ist.
4. Die Funktion soll mit möglichst einfachen Mitteln bearbeitet (deriviert, integriert usf.) werden können.
5. Die Funktion soll eine solche Form haben oder in solche Form gebracht werden können, dass *ihre Parameter rechnerisch geschätzt werden* können und die hieraus erwachsenden praktischen Rechenoperationen sich möglichst einfach gestalten.

Von diesen Forderungen sind 1. und 2. in der Regel einander widersprechend. Einfachheit der Funktionsform ist eine einleuchtende Forderung, die insbesondere als eines der Kennzeichen des Wachstumsgesetzes betont worden ist (vgl. z.B. LUDWIG 1929, S. 736—737, PESCHEL 1938, S. 185, BERTALANFFY 1951, S. 272), da sich eben dadurch die Wirkungsbeziehung der Wachstumsfaktoren am besten anschaulich machen lässt. Dies ist jedoch gewöhnlicherweise gleichbedeutend mit einer entsprechenden Verallgemeinerungs- und Schematisierungstendenz des Modells, was zu den Anforderungen von Punkt 2 im Widerstreit steht. Letzten Endes ist ja das Wesen der jeweils vorliegenden Aufgabe ausschlaggebend dafür, welches Gewicht man den Forderungen der beiden Punkte am zweckmässigsten beimisst.

Die unter 3. ausgesprochene Forderung ist vom Standpunkt der Brauchbarkeit der Funktion zweifellos am bedeutsamsten, wie PESCHELS oben zitierte Auffassung klar darlegt. Die Funktion sollte in der Tat dem allgemeinen Verlauf des Wachstums in seiner Gesamtheit entsprechen, so dass man ihre Ergebnisse unabhängig von der Lokalisation der Beobachtungen betreffs des Wachstumsvorgangs zuverlässig in dessen gesamten Bereich anwenden könnte. Insbesondere mit Rücksicht auf Zuwachsprognosen ist mindestens befriedigende Erfüllung einer solchen Voraussetzung unerlässlich, ehe das Anwenden der Funktion wirklichen Nutzen bringt.

Die Forderungen unter 4. haben ihre besondere Bedeutung aus dem Grunde, dass bei ihrer Erfüllung die verschiedenen Wachstumsfunktionstypen von ein und derselben Ausgangsfunktion hergeleitet werden können (vgl. MICHAJLOW 1952), was selbstverständlich vom Standpunkt der Anwendung seine eigene Bedeutung hat. Jedoch ist die Forderung dieses Punkts an sich keine Voraussetzung für die Anwendbarkeit einer Wachstumsfunktion.

Die Anwendbarkeit einer gegebenen Wachstumsfunktion zur Beschreibung des Wachstums ist jedoch nicht ausschliesslich davon abhängig, wie gut sie den allgemeinen *Verlauf des Wachstumsvorgangs wiedergibt*, und auch nicht davon, wie gut sie *das empirische Material beschreibt*. Eine mit diesen völlig *gleichgestellte Voraussetzung für die Anwendbarkeit* der Wachstumsfunktion ist die unter 5. angeführte *Forderung der rechnerischen Eignung* der Funktion, obwohl diese im allgemeinen bei ihrer Ausarbeitung ohne Beachtung geblieben zu sein scheint (vgl. jedoch THOMASIUS 1964, S. 722). Obwohl sich die rechnerischen Möglichkeiten heutzutage infolge der automatischen Datenverarbeitung entscheidend gewandelt haben, kommt den in Frage stehenden Gesichtspunkten trotzdem ihre eigene, sehr bemerkenswerte Bedeutung zu. Vom Standpunkt der rechnerischen Einfachheit muss man nicht vergessen, dass eventuell unhandliche oder vielleicht sogar unbrauchbare Gestalt der ursprünglichen Funktion ihre Auswertung noch nicht ausschliesst. Oft kann eine derartige, im übrigen u.U. sogar gut geeignete Funktion unter Anwendung einer Transformation in solche Form gebracht werden, dass das Schätzen ihrer Parameter rechnerisch möglich wird (vgl. MATHER 1954, S. 172—173). Es kann sogar sein, dass eine solche Transformation im Gegensatz zu dem, was THOMASIUS (l.c.) als seine Auffassung angibt, die Analyse näher an das tatsächliche Wesen der Abhängigkeitsbeziehung heranführt als die Form der ursprünglichen Funktion. Dies kann besonders mit der logarithmischen Umformung eintreten, da diese bezüglich der Beobachtungen relative Abweichungen vertritt.

Je zweckmässiger eine bestimmte Wachstumsfunktionsform unabhängig von der Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials rechnerisch geschätzt werden kann, umso brauchbarer ist sie. Es ist zweifellos sogar zweckmässiger, dies mittels eines geeigneten Iterationsverfahrens auszuführen, als sich mit aus dem Beobachtungsmaterial graphisch ausgeglichenen oder noch stärker summarischen Näherungswerten zu begnügen (vgl. NIKLAS—MILLER 1926). Es liegt auf der Hand, dass sich dieser Gesichtspunkt ausschlaggebend auf die Anwendungsmöglichkeit mancher im übrigen brauchbaren Funktionsformen auswirkt (vgl. *Dem.B.* 95_1).

Im Wachstumsvorgang treten stets mindestens zwei Grenzpunkte auf, deren Vorkenntnis die Bestimmung der Wachstumsfunktion erheblich erleichtern würde. Diese sind der Zeitpunkt der Maximalphase im Zuwachs (t_M) und derjenige des Alterstodes des Baumindividuums bzw. des Bestandes (T) oder die dieser entsprechende Masse (v_T). Diese hat man auch in einigen Fällen beim Bestimmen der Wachstumsfunktionen heranzuziehen versucht (vgl. z.B. PRODAN 1961, S. 350 und WECK 1951b; s. S. 68). Infolge ihrer Stochastizität bilden jedoch die Messungsergebnisse kaum jemals eine so regelmässige Beobachtungsreihe, dass ein zuverlässiger Zeitpunkt der Maximalphase daraus hervorgehen könnte. Den Zeitpunkt des Alterstodes der Baumindividuen wiederum bekommt man in Wirtschaftswäldern nicht zu sehen, da hier die Bestände schon weit vorher verjüngt werden. So kann man auch nicht sagen, dass Funktionsformen, die teilweise oder gänzlich auf diesen oder anderen Ausgangswerten entsprechender Art fussen, eine solche rechnerische Brauchbarkeit besässen, die als Voraussetzung einer einwandfreien Wachstumsanalyse gelten muss. Eine Sache für sich ist, dass man mit ihrer Hilfe beispielsweise graphisch aus dem Beobachtungsmaterial in gewissem Mass Information über den Charakter des Wachstumsvorgangs schöpfen kann (vgl. WECK 1953 und WEIHE 1961a).

22. DIE ABHÄNGIGKEITSBEZIEHUNGEN IN DER WACHSTUMSFUNKTION

221. Wachstumsfaktoren verschiedenen Grades

Wie sich schon vorn beim Besprechen der allgemeinen Charakterzüge des Wachstumsvorgangs gezeigt hat, wirkt auf das Wachstum eine Unzahl Faktoren von verschiedener Art und Intensität ihrer Wirkung ein, die sich im allgemeinen naturgemäss zu Gesamtheiten verschiedenen Grades gruppieren, und deren Wirkung erst in diesem Rahmen analysiert werden kann (s. z.B. ASSMANN 1961, S. 9—10). Im Einzelnen bleibt die Wirkung eines Faktors meistens verschwindend gering und kann sich in der Gesamtwirkung überhaupt nicht geltend machen. So ist es beim Beschreiben des Wachstums auch hinsichtlich des Zieles von ausschlaggebender Bedeutung, in welcher Weise die Wirkung der Wachstumsfaktoren in dem beschreibenden Modell mit einbezogen wird. In der Regel kommt dies nur durch einige wenige Faktoren (oder besser Faktorenkomplexe) in Frage, die auf diese oder jene Weise im Wachstumsvorgang einen so hohen Wirkungsgrad aufweisen müssen, dass sie faktische Bedeutung für das Ergebnis der Wachstumsanalyse besitzen. Im Prinzip sollte bei ihrer Wahl diejenige optimale Phase als Ziel gelten, bei deren Überschreitung der Nutzen, der aus dem Beobachtungsmaterial als die zusätzliche Information beziehbar ist, den dazu benutzten Arbeitsaufwand nicht mehr aufwiegt. Auf diese Phase wirkt auch die Form ein, in welcher die Wirkung der verschiedenen Faktoren in die Analyse eingegliedert werden kann. Unter Anwendung verschiedener alternativer Mittel kann man in der Analyse sogar zu ganz verschiedenwertigen Ergebnissen gelangen (vgl. *Dem.B. 109* und *124_1)*.

Für das Ergebnis der Wachstumsanalyse ist es oft von entscheidender Bedeutung, dass *die Beziehungen* verschiedenen Grades *zwischen den Wachstumsfaktoren in richtiger Weise zur Berücksichtigung kommen.* Bei richtiger Anwendung wird die Wachstumsanalyse in gänzlich anderem Mass eine Quelle von Information, als wenn man die verschiedenen Wachstumsfaktoren lediglich schematisch ihrer ersichtlichen Wirkung gemäss in der Wirkungsbeziehung eingliedert, die sie auf den Wachstumsvorgang auszuüben scheinen. Immer wenn es in der Wachstumsanalyse möglich ist, *einem* gegebenen *Wachstumsfaktor* (möglicherweise in gewissen Fällen auch einem Komplex von mehreren Faktoren) im Hinblick auf das gesteckte Ziel eine im Vergleich zu den übrigen *dominierende Stellung einzuräumen,* lässt sich damit eine wesentlich effektivere Analyse erzielen. Allerdings muss dann die Voraussetzung erfüllt sein, dass ausdrücklich die Wirkungsbeziehung dieses Faktors zum Wachstum richtig bemessen ist. Dieses Prinzip hat beispielsweise THOMASIUS (1964, S. 715—720) bei seiner Betrachtung der verschiedenen Wachstumskurventypen befolgt, und der gleiche Gedanke kommt in allen Untersuchungen betreffs der das Wachstum beschreibenden Funktionen zum Ausdruck. In der Wachstumsanalyse hat *diese Wirkungsbeziehung* im Vergleich zu den übrigen operierenden Wachstumsfaktoren *die Stellung der* **Hauptveränderlichen.**

Die obige Hervorhebung der Hauptveränderlichen soll *keineswegs* bedeuten, dass die übrigen Wachstumsfaktoren als die Wirkungsbeziehungen erklärenden **zusätzlichen Veränderlichen** bedeutungslos oder immerhin *zweitrangig* wären. *Ihre* eigentliche *Aufgabe ist* es ja, den Betrag und die Ursachen der *Störungen* hinsichtlich des von der Hauptveränderlichen bestimmten Trends des Wachstumsvorgangs (vgl. S. 25) *zu erklären.* Kenntnis der Wirkungsweise einer zusätzlichen

Veränderlichen ist vom Standpunkt der von der Wachstumsfunktion gewonnenen Information nicht so entscheidend wie bezüglich der Hauptveränderlichen, sie stellt aber doch eine Grundlage für die richtige Beurteilung der Bedeutung der zusätzlichen Veränderlichen als Erklärung des Wachstumsvorgangs dar.

Im allgemeinen sollte man danach streben, dass wenigstens in der von der Hauptveränderlichen repräsentierten Wirkungsbeziehung der *tatsächliche* **primäre** *Wachstumsfaktor* hervortritt. Man kann jedoch dieses Prinzip nicht immer bedingungslos anwenden. In gewissen Fällen kann in der Analyse ein **sekundärer,** *scheinbarer Wachstumsfaktor* benutzt werden, *in dem* lediglich *die Wirkung der tatsächlichen Wachstumsfaktoren zum Vorschein kommt.* Dies erfolgt durch Vermittlung eines im allgemeinen mit der gemeinsamen Wirkung mehrerer primärer Faktoren korrelierenden Faktors, dessen Bemessung besser dem Beobachten zugänglich ist (vgl. JONSSON 1962, S. 71). So hat beispielsweise die Höhe des Baumindividuums eigentlich keine eigene Wirkung auf den Betrag des Wachstums, sondern sie bringt in erster Linie das Vorhandensein gewisser anderer Faktoren zum Ausdruck. Dessen ungeachtet kann sie sich als Wachstumsfaktor sehr gut zur Erklärung des Wachstumsvorgangs eignen. Wenn jedoch solche sekundäre Wachstumsfaktoren in Frage stehen, ist es nicht zweckdienlich, die Zahl der erklärenden zusätzlichen Veränderlichen um einen solchen Faktor zu vermehren, der starke Korrelation mit irgendeinem oder vielleicht sogar mit mehreren bereits einbezogenen Veränderlichen aufweist.

Hinsichtlich des Ausdrückens der Wirkungsbeziehung für einen jeden Wachstumsfaktor ist es natürlich am vorteilhaftesten, sich eines solchen Weges zu bedienen, der diesem am deutlichsten hervorbringt. Obgleich die dabei benutzte Anwendungsweise vom Standpunkt des Endergebnisses der Analyse selbst weniger bedeutungsvoll ist, *besitzt* dagegen *bei* seiner *Beurteilung* die Kenntnis der Wirkungsart der zusätzlichen Veränderlichen und *ihre richtige Auslegung Bedeutung,* was man aber gerade dann leicht vergisst. Bei der Ausdeutung der Ergebnisse der Wachstumsanalyse darf man auch nie vergessen, die Wirkung der sekundären Wachstumsfaktoren so weitgehend auf die betreffenden echten Wachstumsfaktoren zu »übertragen», wie ihre Kenntnis es ermöglicht.

222. Die Zeit als Wachstumsfaktor

Der Begriff des Wachstums baut sich in fester, unmittelbarer Abhängigkeitsbeziehung zur Zeit auf (vgl. auch z.B. RICHTER 1963, S. 23, PRODAN 1965, S. 415), wodurch dieser Wachstumsfaktor in eine Sonderstellung versetzt wird. Die Wirkung der Zeit ist ausserdem wesentlich verschiedenen Charakters als die der sonstigen Wachstumsfaktoren, wie BACKMAN (1939, S. 65; vgl. auch BERTALANFFY 1951, S. 60) besonders betont. Die Wirkung der Zeit als massgebender Faktor hinsichtlich des Wachstums ist fernerhin stets dermassen klar und konsequent (vgl. LÖNNROTH 1927, S. 27—28), dass der ihr entsprechende Verlauf des

Wachstums wenigstens in seinen Hauptzügen immer hervortritt. Hieraus folgt auch, dass wenn man ausdrücklich die Beschreibung des Verlaufs des Wachstumsvorgangs als Ausgangspunkt der Wachstumsanalyse nimmt, dieselbe sich ganz naturgegeben auf Grund der Wirkung der Zeit aufbaut. Auch *in der vorliegenden Untersuchung wird* bei der Analyse der Wirkungsbeziehungen der Wachstumsfaktoren *von der Zeit als der Hauptveränderlichen ausgegangen* (vgl. S. 25), da dies namentlich für Prognoseberechnungen die einzige Möglichkeit zu sein scheint (vgl. MICHAJLOW 1952, S. 368).

Wenn man von der Wirkung der Zeit im vorbeschriebenen Sinn spricht, *vertritt* in der Wachstumsfunktion die *Hauptveränderliche* im Grunde den *evolutionären Trendprozess* des Wachstumsvorgangs *im Ganzen*. Damit sind in ihr auch die stochastischen Faktoren des Trends enthalten, die näher im folgenden Kapitel im Zusammenhang der übrigen Wachstumsfaktoren besprochen werden.

Von der oben beschriebenen Grundlage gehen ausnahmslos auch die Untersuchungen betreffs allgemeiner biologischer Wachstumsfunktionen aus (z.B. BACKMAN 1943, RICHARDS—KAVANAGH 1947, BERTALANFFY 1951). In letzter Zeit ist man jedoch verhältnismässig oft auch dazu übergegangen, solche das Wachstum der Bäume messende Funktionen zu konstruieren, die entweder die Zeit als Wachstumsfaktor gänzlich unberücksichtigt lassen, oder sie nur den sonstigen Wachstumsfaktoren an die Seite stellen. Dies führt indessen nur dazu, dass man als auf das Wachstum einwirkende Faktoren Kennwerte verwenden muss, die in Wirklichkeit nur von der Zeit abhängige sekundäre Wachstumsfaktoren sind, wie z.B. aus der Untersuchung von KUUSELA und KILKKI (1963) hervorgeht (vgl. S. 16).

Ein solches Vorgehen kann freilich beispielsweise dann angebracht sein, wenn in einem Bestande die von Altersunterschieden herrührende Inhomogenität derart hoch wird, dass das Beschreiben seines Wachstums auf dieser Basis zu keinem anwendbaren Ergebnis mehr führt, und dass die Abhängigkeitsbeziehung besser auf irgendeinem anderen Wachstumsfaktor gegründet wird. So verhält es sich besonders dann, wenn das Ziel der Analyse keine unbedingt feste Verknüpfung mit der Zeit erfordert, die man dann in den Prognoseberechnungen durch eine andere, beispielsweise auf Entwicklungsklassen (vgl. ILVESSALO 1963, S. 94) basierende Gruppierung ersetzen kann. In solchen Fällen kann die Abhängigkeit des Wachstums auf eine massliche Veränderliche, wie z.B. die Höhe oder die Masse gebaut werden, die ausnahmsweise einen besseren Ausgangspunkt für die Behandlung des Wachstums abgibt. *Von einer* eigentlichen *Beschreibung des Wachstumsvorgangs kann* dann freilich *nicht* mehr *die Rede sein.*

Die vorbetrachtete eigentliche Wirkung der Zeit auf den Wachstumsvorgang ist relativ von ihr, von dem Alter abhängig (vgl. S. 26), aber ausserdem hat offenbar auch der absolute Zeitpunkt seine eigene Bedeutung im Wachstumsvorgang. Dieser Aspekt tritt hervor, wenn man z.B. nebeneinander zu verschiedenen Zeiten stattfindende Wachstumsvorgänge zu betrachten hat. Vorläufig hat er in der Wachstumsanalyse und in der diesbezüglichen Forschung keine sicht-

bare Stelle eingenommen. Es ist indessen möglich, dass beim weiteren Fortschreiten der Forschung mit seiner Hilfe die Menge der aus dem Wachstumsvorgang erhältlichen Information vermehrt werden kann. Hierauf weisen u.a. die Resultate hin, die über die Wirkungen der Wandlungen in den Witterungsverhältnissen auf das Wachstum der Bäume schon heute zur Verfügung stehen (vgl. z.B. MIKOLA 1950).

Zumeist ist der genaue absolute Zeitpunkt der Keimung eines Baumindividuums nicht bekannt, und dadurch ist auch das physiologische Alter eines Baums im allgemeinen nicht zu bestimmen. Man muss daher bei den Beobachtungen davon ausgehen, dass ihre *Ausführungsgrundlagen* auch *den Ausgangszeitpunkt* des Wachstumsvorgangs *festlegen*, was gewöhnlich auf Grund des in dieser oder jener Weise bestimmten Alters des Baumindividuums geschieht (vgl. hierzu z.B. PETRINI 1948, S. 95—96, SIRÉN 1950, S. 9—15 oder PRODAN 1965, S. 415—416).

Wenn es sich *um eine* von Baumindividuen gebildete *Population*, in erster Linie um einen Bestand handelt, *erhält* der Ausgangszeitpunkt des Wachstumsvorgangs und somit auch *sein Alter* bereits einen gänzlich *anderen Inhalt* (vgl. ILVESSALO 1965, S. 224—227, PRODAN 1965, S. 416—419). Das Alter des Bestandes kann aber je nach den Möglichkeiten zum Ermitteln von Beobachtungen und den Zwecken ihrer Anwendung verschieden definiert werden (vgl. z.B. LIHTONEN 1943, S. 24—26, 1959, S. 144, VUOKILA 1956, S. 25). Die Abweichungen zwischen diesen Alterstypen beziehen sich dann immer auf die ersten Jahre der Entwicklung des Bestandes und seiner Baumindividuen.

Besonders grosse Schwierigkeiten ergeben sich bei der Altersbestimmung vom Standpunkt der zweckmässigen Wachstumsanalyse in denjenigen Fällen, wo die Entwicklung der Baumindividuen oder Bestände derart aussergewöhnlich sein kann, dass die Anwendung einer gegebenen Funktionsform auf den ganzen Wachstumsvorgang nicht zum Ziel führt. Ein gutes Beispiel hierfür liefern diejenigen Fälle, in denen sich die Entwicklung der Baumindividuen wegen äusserer Ursachen deutlich zweiphasig (oder u.U. sogar mehrphasig) gestaltet hat. Hiervon haben u.a. WECK (1950b, S. 589—592) und MULTAMÄKI (1923, S. 73) Beispiele angegeben. Man kann dann am besten beide Phasen als gesonderte Wachstumsvorgänge mit getrennten Ausgangszeitpunkten interpretieren (vgl. WECK, l.c.). Bei der letzteren Phase kann ferner Heranziehung der ersteren in irgendwelcher Weise als den Wachstumsvorgang beeinflussender Faktor in Frage kommen *(Dem.B. 123_3* und *125_3)*, und es ist vielleicht möglich, durch dieses Vorgehen die Effektivität der Analyse sogar beträchtlich zu erhöhen.

Die Anwendung der Wachstumsfunktionen bietet ihrerseits eine Möglichkeit, die Bestimmung des Alters von Baumindividuen und Beständen ebensogut im Falle normaler als auch der obenbeschriebenen aussergewöhnlichen Entwicklung auf einheitliche Grundlage zu bringen. Als Ausgangspunkt der Prozedur kann das Bestreben gelten, aus dem Beobachtungsmaterial die wesentlichsten Züge des von ihm vertretenen Wachstumsvorgangs herauszuholen. Dann kann man nämlich davon ausgehen, dass *als beste Schätzung der Wachstumsfunktion* im jeweiligen Fall *die auf einem solchen Ausgangspunkt* des Wachstumsvorgangs *basierende Schätzung* anzusehen ist, die die kleinste Reststreuung ergibt oder *die von irgendeinem* anderen entsprechenden *Kriterium gestellte Bedingung erfüllt.* Das so definierte Alter dürfte man am besten als das **Wachstumsfunktionsalter** t_f des Baums oder des Bestandes bezeichnen können, da man mit seiner Hilfe aus einem gegebenen Beobachtungsmaterial auf Grund einer gegebenen Funktionsform die bestmögliche Schätzung erhält. Das Verfahren erschwert allerdings das Schätzen selbst (vgl. S. 65), aber es vermehrt zugleich wesentlich die Menge der aus dem Beobachtungsmaterial erhältlichen Information.

223. Berücksichtigung der übrigen auf das Wachstum einwirkenden Faktoren

In denjenigen Wirkungsbeziehungen, die im Wachstumsvorgang neben der Wirkung des Alters enthalten sind, kommt eine grundlegende Bedeutung denjenigen hinsichtlich ihrer Wirkung als statisch anzusehenden Wachstumsfaktoren zu, die das Niveau und den Rhythmus des Trends im Wachstumsvorgang bestimmen (s. S. 26). Sie haben die Eigenschaft, dass ihre Wirkung im Rahmen ein und derselben Population in hinreichender Gleichartigkeit, Gleichmässigkeit und Regelmässigkeit den ganzen Wachstumsvorgang hindurch zutage tritt. *Eine solche Wirkung kann* allerdings *in ihrem Grundwesen veränderlich sein, aber* sich immerhin so langsam geltend machen, dass dies *im Rahmen eines Wachstumsvorgangs keine Bedeutung besitzt.* Solche Wachstumsfaktoren können entweder im Gegenstand des Wachstumsvorgangs selbst wirken, wie z.B. in Form einer von genetischen Faktoren bedingten Wachstumsfähigkeit (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 267), oder sie können sich als Wirkung von Umweltfaktoren äussern, wie z.B. als gewisse Bodenart- und klimatischen Faktoren. Der stochastische Charakter dieser Wirkungen kommt durch Verschiedenheiten der Gesamtwirkung bei den verschiedenen Populationen zustande. Ihre Bemessung scheint jedenfalls bis auf weiteres ausserhalb der Möglichkeiten des Beobachtens zu liegen, und dieser Umstand schreibt weitgehend die Art der Analyse vor, die die Trende des Wachstumsvorgangs betrifft.

Das Beschreiben eines gewissen Wachstumsvorgangs ausschliesslich als Funktion des Alters im vorher (vgl. auch S. 34) besprochenen Sinn ist parallel mit dem Prinzip der Anwendung einer gegebenen, von seinem gesamten evolutionären Teilprozess vertretenen Grundlinie. Dann *wird der Trend das Niveau und den Rhythmus* desjenigen Wachstumsvorgangs *anzeigen, der* jeweils durchschnittlich *in* den vom *Beobachtungsmaterial* enthaltenen Verhältnissen *besteht.* Von der Beschaffenheit des Materials hängt es hierbei letzten Endes ab, in welchem Mass die von der Wachstumsfunktion gelieferte Vorstellung unwahre Verfälschung erfährt. Die Art und die Intensität der Wirkung des Störungsprozesses des Wachstumsvorgangs einerseits sowie die Möglichkeiten ihrer Feststellung und das der Wachstumsanalyse gesetzte allgemeine Ziel andererseits entscheiden letzten Endes, ob man versuchen soll, auch sie mittels erklärender zusätzlicher Veränderlichen in Analyse zu ziehen.

Die als zusätzliche Veränderliche in Betracht zu ziehenden Wachstumsfaktoren wiederum sind vom Standpunkt des Wachstumsvorgangs selbst in erster Linie als Faktoren von Störungswirkung zu deuten, und in der Wachstumsanalyse gestaltet sich ihre Berücksichtigung zur Bemessung der im Rahmen eines gegebenen Wachstumsvorgangs auftretenden Unregelmässigkeiten. Diese klare Einteilung zwischen ihnen und den vorher besprochenen stochastischen Wachstumsfaktoren des Trendprozesses dürfte jedoch in einem Beobachtungsmaterial schwerlich jemals völlig rein hervortreten, weshalb das bei der Wachstumsanalyse erhältliche Bild des Trends immer mit einer gewissen Verfälschung behaftet ist.

Diese im Wachstumsvorgang enthaltene, seinen regelmässigen Verlauf störende Wirkung kann ihrem Wesen nach teils *statisch*, teils *dynamisch* sein. Von diesen *gleicht sich die erstgenannte* im Rahmen des gesamten Beobachtungsmaterials *aus.* Dagegen *verteilen sich* die *von der letzteren verursachten Abweichungen systematisch* um das wirkliche Niveau des betreffenden Wachstumsvorgangs. Man muss versuchen, nach Möglichkeit vor allem die letztere zu eliminieren, damit die Analyse ein möglichst zutreffendes Bild vom Trend des Wachstumsvorgangs liefern möge. Im übrigen bleibt die Wirkung der Störungsfaktoren in der Zufallsvariation enthalten, von deren Betrag wiederum das Niveau der Verlässigkeit der Wachstumsanalyse abhängig ist.

Die Form, in welcher die Wirkung der übrigen Wachstumsfaktoren beim Ausführen der Wachstumsanalyse berücksichtigt werden kann, hängt im jeweiligen Fall von den Bemessungsmöglichkeiten der betreffenden Faktoren ab. Zwar kann man in der Theorie davon ausgehen, dass sämtliche auf das Wachstum einwirkenden Faktoren gewiss masslich sind, aber ihre *Bemessung in einer analysefähigen Weise* ist zum grössten Teil entweder unmöglich oder unzweckmässig (vgl. z.B. NÄSLUND 1944, S. 43—45). Vom Standpunkt des Konstruierens der Wachstumsfunktionen ist jedoch die *Erfüllung dieser Bedingung als Voraussetzung* zu erachten, ehe man sagen kann, *dass ein gegebener Wachstumsfaktor*, es sei denn ein primärer oder sekundärer, *als* **messbare** *zusätzliche Veränderliche* in der Wirkungsbeziehung *in Frage kommt.* Hierdurch wird denn auch die Zahl der auf das Wachstum einwirkenden masslichen Faktoren stark eingeschränkt, denn demzufolge fällt der grösste Teil der Wachstumsfaktoren vorwiegend wegen Beobachtungsschwierigkeiten aus der Betrachtung weg. Vom Standpunkt der Wachstumsanalyse haben die messbaren Wachstumsfaktoren besonders grosse Bedeutung; mit ihrer Hilfe lassen sich nämlich die Ursachen der in den Wachstumsvorgängen enthaltenen Streuung am allereffektisten herausbringen.

Viele Wachstumsfaktoren enthalten, wenngleich sie nicht eigentlich zu bemessen sind, trotzdem eine Wirkung von solcher Art oder solchem Ausmass, dass deswegen ihre gesonderte Berücksichtigung in der Wachstumsanalyse erforderlich ist. *Ihre Wirkung lässt sich* indessen oft befriedigend *hervorbringen, indem man eine* zu diesem Zweck geeignete **qualitative** *Klassifikation benutzt.* Im Grund liegt im allgemeinen auch dann eine Bemessung vor, allerdings eine solche, die sich nicht als massliche Angabe der Wirkungsbeziehung eignet. In gewissen Fällen, beispielsweise betreffs der Holzarten, kann aber die Qualitätsmässigkeit der Grundlage schon als nahezu absolut gelten.

Die Berücksichtigung der Wachstumsfaktoren *auf Grund qualitativer Klassifikation* kann im Zusammenhang mit der Wachstumsanalyse *nicht so effektiv wie im Falle messbarer Wirkungsbeziehung* erfolgen. *Ihre Bedeutung* vom Standpunkt des Wachstumsvorgangs selbst ist *jedoch* vollkommen *gleichwertig.* Man muss sich dabei in der Regel mit Vergleichen der Unterschiede zwischen den verschiedenen Klassen begnügen und auf dieser Grundlage Folgerungen betreffs ihrer Bedeutung ziehen. In erster Linie kommt hierbei die *Analyse der Signifikanz von Unterschieden* in Frage. Dadurch kann man nämlich *eine zweckmässige Klasseneinteilung* erzielen, indem man solche Klassen zusammennimmt, zwischen denen kein signifikanter Unterschied besteht. Im Rahmen der so gebildeten Klassen kann man dann die Bemessung der qualitativen Wachstumsfaktoren vornehmen, indem man die durchschnittliche Wirkung einer jeden Klasse auf den Wachstumsvorgang bemisst. Die Effektivität dieser Signifikanz- und Bemessungsanalyse lässt sich oft sehr erhöhen, indem man messbare Faktoren passend zuhilfe nimmt und dadurch die Zufallsvariation möglichst weit herabdrückt.

Bezüglich des Unterschieds zwischen messbaren und qualitativen Faktoren kann man allgemein feststellen, dass man eine *statische Wirkungsbeziehung,* die sich nicht im Verlauf eines jeden Wachstumsvorgangs ändert, in der Wachstumsanalyse *meistens als qualitativen Wachstumsfaktor* berücksichtigen muss. Dagegen bedingt befriedigendes *Hervorbringen einer dynamischen,* hinsichtlich ihres Betrags sich stetig verändernden *Wirkungsbeziehung* in erster Linie ihre Berücksichtigung *auf messende Weise.* Es ist selbstverständlich nicht möglich, tatsächlich eine so klare Einteilung zu befolgen. Man ist letzten Endes stets genötigt, durch Überlegung einen Weg zu suchen, der die beste Verwirklichung der der Wachstumsanalyse gesetzten Ziele gestattet. Selbst wenn irgendein Vorgehen vom theoretischen Standpunkt u.U. nicht ganz einwandfrei wäre, kann man es immer dann rechtfertigen, wenn es wirklich das vom Wachstumsvorgang erhältliche Bild klärt oder präzisiert. Dieser Grundsatz gilt besonders für die Aufgaben des praktischen Bedarfs. Man darf nur beim Anwenden der Ergebnisse der Wachstumsanalyse nicht vergessen, auch die Einschränkungen in Betracht zu ziehen, welche die dabei benutzten Verfahren mitgebracht haben.

Die *Voraussetzung dafür,* einen gegebenen *Wachstumsfaktor* in der Analyse *zu berücksichtigen, ist* also, *dass die Wirkung* eines solchen Faktors deutlich genug *feststellbar ist.* Die meisten Wachstumsfaktoren dürften jedoch *diese Bedingung nicht erfüllen.* Teils deswegen, teils aber auch aus anderen Zweckmässigkeitsgründen nimmt man *ihre Wirkung* nicht gesondert in die Wachstumsanalyse auf. Sie *kommt* dann *in der Zufallsvariation zum Vorschein.* Bei der letzteren muss es sich also durchaus nicht immer um eine rein stochastische Wirkung handeln, sondern lediglich darum, dass man gesonderte Beachtung dieser Wirkung in der Wachstumsanalyse nicht bewerkstelligen kann oder nicht für zweckmässig erachtet. Die Grenze beim Berücksichtigen einer jeden Wirkungsbeziehung kann nie kategorisch bestimmt sein; es bleibt vielmehr letzten Endes der subjektiven Überlegung in jedem Einzelfall überlassen, wann es zweckmässiger ist, einen gegebenen Wachstumsfaktor in der Analyse gesondert zu berücksichtigen, wann wieder, ihn in der Zufallsvariation das Niveau der Verlässigkeit der Analyseergebnisse beeinträchtigen zu lassen.

23. SCHÄTZEN DER WACHSTUMSFUNKTION AN HAND DES BEOBACHTUNGSMATERIALS

Als die Anwendung der Wachstumsfunktionen erstmals dargestellt wurde, hatte die gesamte Frage in erster Linie nur theoretisches Interesse (vgl. PRODAN 1961, S. 334), aber mit der Zeit hat man zu immer leistungsfähigeren Schätzverfahren übergehen können. Angesichts der von den Datenverarbeitungsmaschinen gebotenen Möglichkeiten kann man annehmen, dass wir im Gebrauch der Wachstumsfunktionen hinsichtlich ihrer Anwendungsmöglichkeiten erst am Anfang der Entwicklung stehen. Es ist offenbar, dass die Zuwachsinventuren und -prognosen binnen kurzem eine Zuverlässigkeit völlig anderer Stufe erreichen und mit gänzlich anderen Mitteln zur Ausführung kommen werden als diejenigen, mit denen man sich vorläufig noch begnügen muss.

Die Einführung der graphischen Verfahren war zweifellos der erste wirkliche Fortschritt in der Verwertung der Wachstumsfunktionen. In dieser Beziehung und noch viel mehr in sonstigen Arbeiten der Waldmessung haben sie ihre eigene, sehr bedeutsame Aufgabe gehabt, und im Grunde sind erst die Datenmaschinen mit ihren vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten offenbar soeben im Begriff, sie zu verdrängen (vgl. z.B. ASSMANN-FRANZ 1965, S. 15). Die wesentlichste Schwäche der graphischen Verfahren ist einerseits ihr in hohem Grade subjektiver Charakter (vgl. z.B. DITTMAR 1961, S. 464), andererseits der Umstand, dass Vertrauensschätzungen und andere mathematisch-statistische Analysen in ihrem Zusammenhang nicht möglich sind (vgl. ASSMANN 1961, S. 5—6).

Da beim Schätzen stets das Ziel besteht, die im Beobachtungsmaterial enthaltene Information möglichst effektiv auszunutzen, ist es natürlich, dass ein auf Methoden der mathematischen Statistik aufbauendes rechnerisches Vorgehen auch bei den Wachstumsfunktionen die brauchbarste Anwendungsform ist. Von diesem Gesichtspunkt ausgehend sollen im folgenden näher einige Probleme allgemeiner Natur berührt werden, die beim Schätzen der Wachstumsfunktionen in vielem verschiedenem Zusammenhang auftreten *(Dem.B. 91_1).*

Die allgemeine Praxis scheint bisher vorausgesetzt zu haben, dass das Beobachtungsmaterial beim Schätzen einer Wachstumsfunktion von einer Teilpopulation gleicher Stufe stammen soll, im Hinblick auf die das Schätzen ausgeführt wird. Daher hat man fast ausnahmslos bestandsweise gesammeltes Beobachtungsmaterial als Voraussetzung für das Errechnen von Wachstumsfunktionen erachtet. Man kann jedoch von der zuvor angeführten Auffassung ausgehen (vgl. S. 27, s. auch PRODAN 1961, S. 331), dass im Rahmen einer gewissen Totalpopulation die Wachstumsfunktionen aller Stufen, beginnend mit den auf Baumindividuen beruhenden, auf ein und derselben Zufallsfunktion als ihre Realisierungen beruhen. Auf dieser Grundlage *kann man aus Zuwachsbeobachtungen an einzelnen Baumindividuen unmittelbar eine Wachstumsfunktion für die Population im Ganzen schätzen*, die vom Beobachtungsmaterial repräsentiert ist, ohne als Zwischenstufe die Bestimmung der Zuwachsbeträge von Probepopulationen benutzen zu müssen. Voraussetzung ist hierbei nur, dass die Repräsentativität des als Probebäume benutzten Materials vom Standpunkt der gesamten Population verfälschungsfrei ist. Die gleiche Bedingung muss aber selbstverständlich in jedem Falle gestellt werden. Zu bemerken ist, dass trotz des soeben Gesagten das populations-, besonders bestandesweise Material dennoch seinen eigenen Gebrauchswert behält. Seine Bedeutung tritt besonders bei der Analyse der Wirkung der als zusätzliche Veränderlichen mitzunehmenden Wachstumsfaktoren hervor.

Wenn die Parameter der Realisierungen unabhängige Zufallsvariablen mit normaler Verteilung sind, ist dies so zu deuten, dass es sich *bei der Schätzung der Populations-* bzw. Bestandes*funktion* im Grunde *um Bestimmung des* auf gewisse Weise gewogenen *Mittelwerts der* baumindividuellen Wachstums*funktionen handelt.* Dasselbe Prinzip gilt natürlich auch für Funktionen von anderen hierarchischen Stufen untereinander. Eine geeignete Gewichtung beruht dann selbsttätig auf ihren Reststreuungen (vgl. z.B. DEMING 1948, S. 21). Naturgemäss führt dies im allgemeinen automatisch dazu, dass die Parameter der Wachstumsfunktion und zugleich die Funktion selbst für eine Population geschätzt werden können, indem man die betreffenden Beobachtungsmateriale ihrer einen, hierarchisch niedrigeren Teilpopulation oder der einzelnen Baumindividuen zusammennimmt und auf Grund dieses Materials die Wachstumsfunktion für die gesamte Population schätzt. Dieses Vorgangsprinzip ist davon unabhängig anwendbar, was für Stufen der Totalpopulation die Teilpopulationen, die die Schätzung betrifft, vertreten, wenn nur die Representativität des Materials unverfälscht ist.

Das Schätzen einer gewissen Wachstumsfunktion und damit auch das übrige auf dieser beruhende Analysieren des Beobachtungsmaterials kann dann auf zwei im Prinzip verschiedenen Wegen erfolgen:

— entweder *durch Zusammennehmen des gesamten* ursprünglichen *Beobachtungsmaterials* zu einem einheitlichen Beobachtungsmaterial, wobei sowohl die Gewichtung seiner verschiedenen Teile als auch die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Parametern naturgemäss Berücksichtigung finden,

— oder indem man das Schätzen der Wachstumsfunktion und die übrige Analyse *auf die Parameterschätzungen* der beobachteten Wachstumfunktionen *begründet.* Hierbei sind einerseits die Gewichtung der als Beobachtungswerte anzuwendenden Parameterschätzungen sowie andererseits die Abhängigkeit zwischen den betreffenden Parametern untereinander derart zu berücksichtigen, dass sich keine bedeutungsvolle Verfälschung ergeben kann. Die Parameterschätzungen müssen somit dabei als eine Gesamtheit behandelt werden.

Da sich die Zufallsfunktion in erster Linie auf den ihren Rhythmus bestimmenden Parametern aufbaut (vgl. S. 26), muss dieser Ausgangspunkt auch beim Schätzen der Wachstumsfunktionen ausschlaggebend sein. Vom Standpunkt des Schätzergebnisses ist es somit von grösster Bedeutung, wie effektiv die Niveauunterschiede zwischen den im Beobachtungsmaterial enthaltenen Wachstumsvorgängen beim Schätzen berücksichtigt werden können, so dass sie keine Verfälschung hervorrufen. Dies kann geschehen:

— entweder indem man versucht, die Niveauunterschiede zu eliminieren, indem man das Schätzen zuerst nur *auf Grund der inneren Streuung* einer jeden Wachstumsfunktion ausführt (vgl. S. 82) und das Niveau des Wachstumsvorgangs erst danach gesondert schätzt.

— oder derart, dass der Einfluss der Niveauunterschiede *mittels* diese Unterschiede *messender zusätzlicher Veränderlichen* im Modell der Zufallsfunktion gleichzeitig mit dem übrigen Schätzen einbezogen wird.

Welche der beiden Verfahren man anwenden wird, darauf wirken in jedem Schätzungsfall sowohl die Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials, z.B. seine Heterogenität, als auch vor allem die Form der Wachstumsfunktion ein, letzterenfalls z.B., ob das anzuwendende Wachstumsmodell additiv oder (beispielsweise bei logarithmischer Transformation) multiplikativ ist.

Ein Problem für sich bildet beim Schätzen der Wachstumsfunktionen das Alter der Probebäume, wenn man an Hand der an ihnen gemessenen Beobachtungsreihen (z.B. Stammanalyseergebnissen) die Funktion für einen gegebenen Bestand schätzt. Für sonstige Populationsstufen kommt kein entsprechendes Problem vor. Das besagte Schätzen kann

— entweder *auf dem gemessenen Alter eines jeden Probebaums an sich* basieren, wobei dann das Gewicht individuell auf dem separaten Charakter einer jeden Beobachtungsreihe zu liegen kommt,

— oder man stellt dabei *auf Grund eines gemeinsamen mittleren Alters* alle Beobachtungsreihen hinsichtlich des absoluten Zeitablaufs einander gleich, wobei das Gewicht beim Schätzen vorwiegend auf der Populationsgesamtheit liegen wird.

Im ersteren Fall wird im Zusammenhang mit dem Schätzen das Alter des Bestandes zum Messungszeitpunkt nicht bestimmt, dagegen aber gleichen sich die periodischen Schwankungen des Zuwachses infolge der Altersunterschiede der Baumindividuen dabei weitgehend aus. Im letzteren Fall wieder kann man entweder einen gewissen beliebigen Alterswert für den Bestand zum Ausgangspunkt nehmen, oder man schätzt ihn als Wachstumsfunktionsalter (t_f, vgl. S. 36). Die mit der absoluten Zeit verknüpfte systematische Wirkung, wie eben die periodische Schwankung, kommt dann betonter zum Ausdruck als im vorigen Fall, was offentsichtlich dazu beiträgt, eine entsprechend grössere störende Wirkung derselben hervorzurufen.

Im folgenden wird noch eine Vorgangsmöglichkeit betrachtet, die namentlich in praktischen Aufgaben sehr zweckmässig sein kann. Wenn sich das verfügbare Beobachtungsmaterial oft störend heterogen gestaltet, kann man nämlich beim Schätzen zwecks Sicherung des geeigneten Verlaufs der Wachstumsfunktion auch eine geeignete **Stützfunktion** heranziehen, die dem zu beschreibenden Wachstumsvorgang entspricht, und auf welche man sich beim Ausführen des Schätzens »stützt». Eine solche Funktion kann jede beliebige Form haben, aber am natürlichsten und vom Standpunkt des Ausführens des Schätzens einfachsten ist es jedoch, dass sie der Form der zu schätzenden Funktion entspricht *(Dem.B. 109)*.

Das Prinzip der kleinsten Quadrate als Ausgangspunkt des Schätzens führt in einem solchen Fall zu der Bedingung, dass die Summe der Abweichungen, einerseits aus den Werten des Beobachtungsmaterials und andererseits aus den entsprechenden Werten der Stützfunktion berechnet, ein Minimum sein soll.

Dieses Prinzip kann man auch anwenden, indem man die Stützfunktion in bezug auf die Beobachtungswerte mit geeigneten Gewichten versieht. Wird dieses Gewichtungsverhältnis der Stützfunktion $f_s(x)$ zu den Werten (y) des Beobachtungsmaterials mit $w:1$ bezeichnet, wobei w gegebenerweise auch eine Funktion sein kann, z.B. $= f_w(x)$, so wird die Bedingung der zu schätzenden Funktion $f_e(x)$, wie folgt:

(42.1) $$\Sigma[y - f_e(x)]^2 + \Sigma w[f_s(x) - f_e(x)]^2 = \text{Minimum.}$$

Die Effektivität des Schätzens hängt auch in diesem Fall davon ab, in wie gelungener Weise die Stützfunktion $f_s(x)$ und die damit verbundene Gewichtung (w) gewählt werden.

Überdies wird weiter unten (S. 66 und 71) noch ein anderes, mit dem vorigen paralleles Prinzip, dasjenige der **bedingten** Wachstumsfunktion vorgelegt.

3. DAS MATHEMATISCHE MODELL DES WACHSTUMSVORGANGS

31. GRUNDLAGEN DES MODELLS

Das Wachstum des Baumindividuums geschieht bekannterweise durch Bildung von Wuchsmänteln auf den bereits zuvor entwickelten Stammteil (s. z.B. PRODAN 1965, S. 420). In der Regel findet ihre Entstehung im Verlauf einer besonderen Wachstumsperiode statt, wonach eine deutliche Stillstandsphase bis zum Beginn der neuen Wachstumsperiode eintritt. Das Wachstum des Baumindividuums zerfällt demnach den Wachstumsperioden entsprechend in klar voneinander getrennte Abschnitte, und man kann denn auch bei Betrachtungen des Wachstums davon ausgehen, dass der in einer Wachstumsperiode entstandene Wuchsmantel, d.h. der Betrag des Zuwachses in der Wachstumsperiode derjenige Ausgangspunkt ist, auf den man die Betrachtung des Wachstums gründen kann (vgl. S. 10). Da beim Deuten des Wachstumsvorgangs als stochastischer Prozess (vgl. S. 24)) *die jährlichen Wuchsmäntel Realisierungswerte der Zufallsfunktion sind*, deren jeder von ihren übrigen Werten deutlich *zeitlich getrennt* in Erscheinung tritt, ist die Wachstumsfunktion in diesem Sinn ihrem Grundwesen nach als *diskrete* Funktion anzusehen (vgl. auch PRODAN 1965, S. 422).

Beim Betrachten des Wachstumsvorgangs kann man jedoch auch den Weg einschlagen, dass man den Lebensverlauf des Baumindividuums als ununterbrochene Ereigniskette auffasst, in der die Wachstumsperioden mit ihren Stillstandsphasen derart regelmässig wiederkehrende Saisonschwankungen darstellen, dass man sie vom Standpunkt des Verfolgens des Wachstumsvorgangs ausser Acht lassen und man stattdessen annehmen kann, das Wachstum ergebe

sich ununterbrochen, und zwar in einem mit dem Trend übereinstimmenden Mass. Man kann sich dann die Wachstumsfunktion *stetig* vorstellen, so dass sie *den Betrag des jährlichen Zuwachses im ununterbrochenen Wachstum zu jedem beliebigen Zeitpunkt* angibt.

Beide obenerwähnten Alternativen können zur mathematischen Darstellung des Wachstums angewandt werden, je nachdem, welche von ihnen jeweils einen zweckmässigeren Ausgangspunkt gestaltet.

Der jährliche Wuchsmantel des Baumindividuums, den man als seinen jährlichen **Zuwachs** i bezeichnen kann, ist abhängig von zahlreichen verschiedenartigen Wachstumsfaktoren, die man z.B. wie folgt (vgl. ASSMANN 1961, S. 1 und THOMASIUS 1964, S. 715) einteilen kann: *Alter (t)*, *Umweltfaktoren (u)*, *genetische Faktoren (g)* und *wirtschaftliche Massahmen* des Menschen *(e)*. Für den Wachstumsvorgang des Baumindividuums erhält man dann folgende allgemeine *Grundform der Funktion des Wachstumsvorgangs:*

(43.1) $$i = f(t;\, u_1, u_2, \ldots u_m;\, g_1, g_2, \ldots g_n;\, e_1, e_2, \ldots e_p).$$

In der so dargestellten Funktionsform betont das Einbeziehen des Alters in der Gleichung ohne Index die Sonderstellung der Zeit als Wachstumsfaktor im Vergleich zu den übrigen Wachstumsfaktoren.

In der vorliegenden Untersuchung dient als Ausgangspunkt der Wachstumsanalyse dem zuvor angegebenen Prinzip gemäss (vgl. S. 34) eine auf der Zeit basierende Interpretation, weshalb bei der Beschreibung des Trends, d.h. des evolutionären Grundprozesses mitsamt aller in ihm enthaltenen Wachstumsfaktoren, *als Hauptveränderliche* in allen Fällen das *Alter* verwertet wird. Die übrigen Wachstumsfaktoren der Gleichung (43.1) wiederum sind im *Störungsprozess* des Wachstumsvorgangs enthaltene, die Abweichungen von dem Trend erklärende *zusätzliche Veränderliche.*

Theoretisch betrachtet ist die Zahl der in der Gleichung (43.1) vorkommenden unabhängigen Variablen beliebig gross, wohl aber endlich. In früherem Zusammenhang (S. 31—33) hat sich bereits gezeigt, dass sie in der Regel eine ausserordentlich komplizierte Wirkung ausüben, die in der Praxis nie gesondert zum Vorschein gebracht werden kann. Vielmehr sieht man im allgemeinen das Zusammenwirken sehr vieler Faktoren, oftmals nur durch Vermittlung sekundärer Faktoren. So muss man auch die Zahl der in den Modellen des Wachstumsvorgangs mit einzubeziehenden zusätzlichen Veränderlichen in der Regel auf einige wenige, vom Standpunkt der Wachstumsanalyse ausschlaggebende Wachstumsfaktoren einschränken.

32. DAS AUF DEM ALTER AUFBAUENDE GRUNDMODELL DES WACHSTUMS (DER TREND)

321. Wachstum zu einem gegebenen Zeitpunkt und in einer Zeitperiode

Im allgemeinen wird das Wachstum in der Form dargestellt, dass die Wachstumsintensität an einen gegebenen Zeitpunkt der Lebensdauer durch den *Betrag des jährlichen Zuwachses* wiedergegeben wird. Auch wenn man sich die Wachstumsfunktion stetig vorstellt, wird der Wert der Wachstumsintensität von einem dem jährlichen Zuwachs entsprechenden Betrag bemessen, der dann jedoch an allen beliebigen, also auch an anderen als ganzzahligen Zeiteinheiten entsprechenden Stellen der Zeitachse lokalisiert werden kann.

Somit wird die *Zeiteinheit*, deren man sich zweckmässig als Ausgangspunkt beim Bemessen des Wachstums bedienen kann, dem zuvor dargestellten Prinzip entsprechend naturgemäss das *Jahr* sein (vgl. Blanckmeister 1956, S. 120). In dem in der vorliegenden Untersuchung bestehenden Sinn verknüpfen sich mit der Wachstumsanalyse keinerlei theoretische oder praktische Gesichtspunkte, die ein Messen des Wachstums bezüglich kürzerer Zeitspannen voraussetzen würden, was auch in erforderlichem Ausmass sehr grosse Schwierigkeiten der praktischen Ausführung bewirken würde.

Wenn sich die Betrachtung auf ein längeres Zeitintervall als eine Wachstumsperiode bezieht, kann man erachten, dass eine *Zeitperiode* gegebener Länge in Frage steht. Ihre Länge beträgt somit im Grunde zumindest zwei Jahre, und ihre maximale Länge wird sich beim Berechnen des Wachstums naturgemäss auf die gesamte Lebensdauer des Baums bzw. des Bestandes beziffern. Beim Ausführen von Messungen wendet man üblicherweise Zeitperioden von 5 oder 10 Jahren an (vgl. z.B. Petrini 1948, S. 99, Prodan 1965, S. 420, Ilvessalo 1965, S. 131, Hildebrandt 1967, S. 96—97), aber es ist selbstverständlich möglich, solche jeder gewünschten Länge anzuwenden, falls die Aufgabe dies verlangt.

Das Alter des Baumindividuums bzw. des Bestandes (vgl. S. 26) ist die Zeitspanne von seinem Ausgangszeitpunkt (t_0) bis zu einem gegebenen Zeitpunkt in seinem Wachstumsvorgang t_i, und es wird mit Hilfe dieses Intervalls berechnet. Die Gesamtmenge der Zuwachsbeträge in dieser Zeitspanne ergibt ihrerseits das **Wachstum** v_i in diesem Alter t_i. Hieraus folgt naturgemäss, dass der zweite Grenzwert des Wachstums und zugleich sein Maximalwert in Wirklichkeit dem Betrag im Zeitpunkt T des Altertods zugeordnet ist, obgleich dieser oft der Konstruktion der angewandten Wachstumsfunktion zufolge dem Zeitpunkt $t_i = \infty$ entspricht (vgl. Thomasius 1964, S. 716).

322. Das Wachstum des einzelnen Baumindividuums

Das Wachstum des einzelnen Baumindividuums stellt die eigentliche Grundlage des Wachstumsvorgangs dar, da sich auf diesem ihrerseits alle Wachstumsfunktionen der von Baumindividuen gebildeten Populationen, mit denjenigen des Bestands beginnend, aufbauen (s. S. 27; vgl. Prodan 1965, S. 419).

Als *Grundgleichung* für den Wachstumsvorgang des Baumindividuums (vgl. Prodan 1965, S. 603, s. jedoch z.B. Peschel 1938, S. 197) kann man den *Trend seines Zuwachses* ansehen. Laut dieser Grundgleichung hat sein i:ter Wuchsmantel folgende Grösse:

(45.1) $$i_i = f(t_i).$$

Die Gleichung kann man als eine *Verteilungsfunktion* des Wachstumsvorgangs ansehen, denn sie dürfte angeben, in welcher Weise sich die Partikel der im Wachstumsvorgang mitspielenden Substanz (vgl. Thomasius 1964, S. 715) auf die Zeitachse unter dem Lebensverlauf des Baumindividuums verteilen.

Indem der Stamm des Baumindividuums zu jedem Zeitpunkt die von ihm bis dahin gebildeten Wuchsmäntel umfasst, repräsentiert die entsprechende *Summenfunktion* des Wachstumsvorgangs zu dem Zeitpunkt t_i

(45.2) $$v_i = f(t_i)$$

der Verteilungsfunktion (45.1) in ihrer allgemeinen Form den *Betrag des Wachstums* des Baumindividuums, d.h. seine *Masse*.

Betrachtet man die Verteilungsfunktion (45.1) als diskrete Funktion, dann erhält die Funktion des Wachstums zu einem gegebenen Alter t_i die Form

(45.3) $$v_i = \sum_{i=1}^{i} i_i \, .$$

Wird wiederum die Verteilungsfunktion i als stetig angenommen, so vertritt das Integral

(45.4) $$v_i = \int_0^i i_i \, dt$$

das Wachstum des Baumindividuums im Alter t_i.

Im Normalfall ist die Entwicklung des Baumindividuums regelmässig, wobei sich in jeder Wachstumsperiode, die gesamte Lebensdauer des Individuums hindurch, den bisherigen Wuchsmänteln stets ein neuer angliedert. Von dieser Allgemeinregel gibt es selbstverständlich Ausnahmen, u.a. infolge von Schadenereignissen. Solche Sonderfälle sind indessen dermassen zufälliger Art, dass sie im Rahmen der gesamten Population belanglos sind. Ihre gesonderte Betrachtung hat daher keine Bedeutung im Hinblick auf die Interpretation des Wachstumsvorgangs.

323. Das Wachstum eines Bestandes

Als Ausdruck ersten Grades der von Baumpopulationen gebildeten Hierarchie kann man den *Bestand* (s. S. 25, vgl. ILVESSALO 1965, S. 159) betrachten, der in vieler Hinsicht die *Grundeinheit* der forstwirtschaftlichen Massnahmen darstellt (vgl. LIHTONEN 1944, S. 78—79). Der Bestand kann jedoch nicht einfach bloss als eine Summe der zu ihm gehörigen Baumindividuen betrachtet werden, sondern er *bildet* vielmehr *biologisch gesehen eine* mehr oder weniger feste *Gesamtheit*, auf die sowohl bestandsinnere, zwischen den Baumindividuen wirksame, als auch äussere Faktoren einwirken (vgl. ASSMANN 1961, S. 82). Deshalb ist seine Bedeutung vom Standpunkt der Betrachtung des Wachstumsvorgangs wesentlich anderer Art als die der grösseren von Baumindividuen gebildeten Populationen, wie z.B. Waldbetriebe und gewisse umfangreichere Waldgesamtheiten. Die Bestände kann man als gewisse Grundbestandteile dieser letzteren den Baumindividuen gleichstellen (vgl. WOHLFAHRT 1953, S. 29). Jedoch trifft das im folgenden bezüglich des mathematischen Modells des Wachstumsvorgangs im Bestand Dargestellte in geeigneten Punkten auch auf umfangreichere Baumindividuenpopulationen zu, und in der Wachstumsanalyse der letzteren kann man im allgemeinen entsprechende methodische Prinzipe wie auch bei dem Bestand in Anwendung bringen.

Hinsichtlich des mathematischen Modells setzt sich *das Wachstum des Bestands unmittelbar aus demjenigen der in ihm enthaltenen Baumindividuen* zusammen, womit der Gleichung (45.1) die den Zuwachs I_i des Bestands in dem Alter t_i darstellende Gleichung

(46.1) $$I_i = \sum_n i_{hi} \qquad (h = 1,2,\ldots n)$$

entspricht, worin n die Anzahl der im Bestand enthaltenen Baumindividuen (h) ist. Die der Verteilungsfunktion (46.1) entsprechende Summenfunktion

(46.2) $$V_i = \sum_n v_{hi} \qquad (h = 1,2,\ldots n)$$

gibt die *Masse des Bestands* zu einem gegebenen Zeitpunkt t_i an. Diese setzt sich ja aus den Massen der im Bestand wachsenden Baumindividuen zusammen.

Bei den einzelnen Baumindividuen ist die Gültigkeit der Gleichungen (45.1) und (45.2) im allgemeinen ein offenbarer und eindeutiger Sachverhalt, solange sie unversehrt am Leben sind. Vom Standpunkt des Bestands verhält es sich nicht so einfach. Die Anzahl seiner Baumindividuen nimmt dauernd ab, indem ein Teil davon abstirbt oder sie zu verschiedenen Zeitpunkten gefällt werden. Auf die in dem zu einem gegebenen Zeitpunkt t_i erfolgenden *Abgang* enthaltenen Baumindividuen treffen für den Bestand die den Gleichungen (46.1) und (46.2) entsprechenden Gleichungen

(46.3) $$I_{Ai} = \sum_m i_{pi} \qquad (p = 1,2,\ldots m)$$

(46.4) $$V_{Ai} = \sum_m v_{pi} \qquad (p = 1,2,\ldots m)$$

zu. Die Verteilungs- und Summenfunktionen des Abgangs zu einem jeden Zeitpunkt ergeben sich also als Summe der entsprechenden Funktionen der darin enthaltenen Baumindividuen gleicherweise wie die entsprechenden Funktionen des Bestands.

Die sowohl den Zuwachs als auch das Wachstum darstellenden Gleichungen (46.1—4) sind also zu einem gewissen Zeitpunkt t_i in Kraft. Dagegen sind sie, im Gegensatz zu den entsprechenden, ein einzelnes Baumindividuum betreffenden Gleichungen (45.1) und (45.2), die unverändert die ganze Lebensdauer des Baums hindurch zutreffen, nicht allgemein gültig. *Sie gelten nur während der Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abgängen*, da die Anzahl der im Bestand enthaltenen Baumindividuen nach jedem Abgang verschieden ist.

Falls die Zahl der anfangs im Bestand enthaltenen Baumindividuen N betrug, und aus demselben in seinen verschiedenen Entwicklungsphasen zu den Zeitpunkten $t_i, t_j, \ldots t_p$ aus verschiedenen Ursachen Stämme in der Zahl von $n_i, n_j, \ldots n_p$ abgegangen sind, so gilt bezüglich dieser Anzahlen, da aus dem Bestand bis zum Ende seines Lebens alle seine Baumindividuen abgehen werden, die Gleichung

(47.1) $$n_i + n_j + \ldots + n_p = N \ .$$

Hierbei ist die Zahl der Baumindividuen im Bestand bis zum Zeitpunkt t_i seine ursprüngliche Stammzahl N, hiernach bis zum Zeitpunkt t_j die Zahl $N - n_i$, anschliessend bis zum Zeitpunkt t_k die Zahl $N - n_i - n_j$ usf., bis schliesslich die Zahl der Baumindividuen im Bestand vom vorletzten Abgang bis zum Räumungshieb n_p beträgt.

Die Holzmasse des Bestands zu einem jeden Zeitpunkt besteht laut Gleichung (46.2) aus dem Gesamtbetrag der Massen der zu jenem Zeitpunkt in ihm enthaltenen Baumindividuen und gleichermassen besteht die Masse eines jeden Abgangs nach Gleichung (46.4) aus der gesamten Masse der in ihm enthaltenen Baumindividuen. Somit beträgt beispielsweise zum Zeitpunkt t_j die Masse des Bestands

(47.2) $$V_j = \sum_{N-n_i} v_j \ ,$$

wovon der Abgang die Masse

(47.3) $$V_{Aj} = \sum_{n_j} v_j$$

enthalten wird, und im Bestand als weiter in Entwicklung stehender Holzbestand die Masse

(47.4) $$V_{j(\to k)} = \sum_{N-n_i-n_j} v_j$$

übrig bleiben wird.

Den Zuwachs des Bestands zu einem gegebenen Zeitpunkt bilden nach Gleichung (46.1) die Summe der Zuwächse der in ihm zu diesem Zeitpunkt enthaltenen Baumindividuen, während wiederum als *Zuwachs* des Bestands während *einer* gegebenen *Zeitperiode die Summe der Zuwächse* zu allen Zeitpunkten *derjeniger Baumindividuen* zu betrachten ist, *die ihm* während dieser Zeitperiode — gänzlich oder teilweise — *angehört haben.* Wenn man dabei die Zeitperiode vom Ausgangszeitpunkt t_0 des Bestands bis zu einem gegebenen Zeitpunkt t_l betrachtet, so kann man vom Wachstum des Bestands V_{Wl} in diesem Zeitpunkt t_l sprechen. Falls der letzte vor diesem Zeitpunkt stattgefundene Abgang zum Zeitpunkt t_k erfolgte, so hat die Zahl der anschliessend weiter in Entwicklung stehenden Baumindividuen

(48.1) $$n_l = N - n_i - n_j - \ldots - n_k$$

betragen. Das **Wachstum des Bestands** V_W setzt sich dann, ausser aus den Wachstumsbeträgen (den Massen) der zum besagten Zeitpunkt t_l im Bestand enthaltenen Baumindividuen, fernerhin aus den Wachstumsbeträgen (den Massen) der Baumindividuen in den bishin zu verschiedenen Zeitpunkten stattgefundenen Abgängen zusammen:

(48.2) $$V_{Wl} = V_l + V_{Ai} + V_{Aj} + \ldots + V_{Ak}.$$

Unter Anwendung des Wachstums V_W als Ausgangspunkt kann man den *Zuwachs* $I_{j\to l}$ *des Bestands* in der Zeitperiode $t_{j\to l}$ zwischen zwei Zeitpunkten t_j und t_l auch als Differenz der Wachstumsbeträge dieser beiden Grenzpunkte definieren, d.h.

(48.3) $$I_{Wj\to l} = V_{Wl} - V_{Wj}.$$

Auf Grund der Gleichung (48.3) kann man folgern, dass im Zuwachs des Bestands dann die Gesamtmenge der Zuwachsbeträge vom Zeitpunkt t_{j+1} bis zum Endzeitpunkt t_l der in ihm zum letzteren Zeitpunkt enthaltenen Baumindividuen sowie die Zuwachsbeträge derjenigen Baumindividuen, die den innerhalb dieser Zeitperiode stattgefundenen Abgängen angehören, vom Zeitpunkt t_{j+1} bis zum betreffenden Abgangszeitpunkt enthalten sein werden. Setzt man voraus, dass während der Zeitperiode $t_{j\to l}$ zu den Zeitpunkten $t_e \ldots t_k$ Abgänge stattgefunden haben, so kann der Zuwachs des Bestands während dieser Zeitperiode geschrieben werden:

(48.4) $$I_{Wj\to l} = (V_l - V_{j(l)}) + (V_{Ae} - V_{Aj(e)}) + \ldots + (V_{Ak} - V_{Aj(k)}),$$

worin $V_{j(l)}, V_{Aj(e)}, \ldots, V_{Aj(k)}$ den Gesamtbetrag der Summenfunktionen des Wachstums der im Bestand bzw. in den Abgängen enthaltenen Baumindividuen zum Zeitpunkt t_j bezeichnen.

Bei Benutzung der von LIHTONEN (1943, S. 185—187) in seiner Ertragshiebsberechnung angewandten Terminologie (vgl. auch LIHTONEN 1959, S. 218—223) vertritt in der Gleichung (48.4) die Differenz $V_l - V_{j(l)}$ den Zuwachs des Ertragsvorrats in der Zeitperiode $t_{j\to l}$ und die entsprechenden, die Abgänge betreffenden Differenzen vertreten den Zuwachs des Abgangsvorrats im Verlauf der Zeitperiode $t_{j\to l}$.

324. Verhältnis zwischen Beträgen des Wachstums

Obgleich es anzusehen ist, dass das Ermitteln des vorstehend betrachteten *absoluten* Betrags des Wachstums vom Standpunkt der Wachstumsanalyse eine fundamentale Bedeutung hat, liefert dies jedoch allein keine genügende Grundlage namentlich für die den Zuwachs betreffenden Prognoseberechnungen. Man muss sie daher durch eine Betrachtung des *relativen* Betrags des Wachstums komplettieren (vgl. z.B. MÜLLER 1915, S. 364—365).

Den Ausgangspunkt für diese liefert der Entstehungsprozess des Holzbestandkapitals. Man kann den *Wachstumsvorgang* des Baums, wie man es in der Holzmesslehre schon seit langem getan hat, einem *Zinseszinsvorgang gleichstellen*, in dem der vom Holzbestandskapital in Form des Zuwachses gelieferte Zuschuss einmal in jeder Wachstumsperiode diesem Kapital zugeschlagen wird (vgl. z.B. PRODAN 1965, S. 431). Diese Prozessform tritt besonders deutlich zutage, wenn man die Entwicklung des einzelnen Baums verfolgt, aber genau das Gleiche lässt sich auch in der Entwicklung des Bestands beobachten, wo lediglich die zeitweisen partiellen Realisationen des Holzbestandskapitals Änderungen im sonst regelmässigen Zinseszinsvorgang herbeiführen.

Als übliche Darstellungsweise des relativen Betrags des Zuwachses hat man das **Zuwachsprozent** p verwendet, mittels dessen sein Betrag in einer gewissen Zeitperiode entweder auf das Anfangskapital des Holzbestands *(Rabattprozent)* oder auf sein Endkapital *(Diskontprozent)* bezogen wird. Diese beiden hat man allgemein bei Berechnungen herangezogen, und über ihre Anwendungsweisen ist im Laufe der Zeit viel gestritten worden (vgl. KUUSELA 1953).

Das Zuwachsprozent $p_{j\to l}$ einer gegebenen Zeitperiode $t_{j\to l}$ kann also auf Grund des Wachstums zu den beiden Grenzzeitpunkten dieser Zeitperiode bestimmt werden, und zwar erhält man dann für die Gleichung bezüglich des Baumindividuums die Form

(49.1) $$p_{j\to l} = \frac{v_l - v_j}{v_j} \cdot 100 \qquad \text{(Rabattprozent) oder}$$

(49.2) $$p_{j\to l} = \frac{v_l - v_j}{v_l} \cdot 100 \qquad \text{(Diskontprozent)},$$

wobei sich der erhaltene Prozentwert auf die gesamte Zeitspanne $t_{j\to l}$ beziehen wird. Steht die Bestimmung des Zuwachsprozents bei einem Bestand in Frage, dann treten an die Stelle der Beträge des Baumindividuums die entsprechenden Wachstumsbeträge des Bestands an Hand der Gleichung (48.4).

Das durchschnittliche jährliche Zuwachsprozent wird allgemein (vgl. z.B. ILVESSALO 1965, S. 131) einfach linear als *arithmetisches Mittel* der Prozente der betreffenden Zeitperiode berechnet:

(49.3) $$p_{l/j} = \frac{p_{j\to l}}{l - j},$$

was, theoretisch betrachtet, im Rabattprozent Überschätzung des Zuwachses in der gesamten Zeitperiode und beim Diskontprozent entsprechenderweise seine Unterschätzung bewirkt. Eine zweite Möglichkeit zur Ermittlung des durchschnittlichen Zuwachsprozents ist die Voraussetzung, dass das Verhältnis zwischen den Zuwachsbeträgen aufeinanderfolgender Jahre die Zeitperiode hindurch unverändert bleibt. Dann bestimmt sich das durchschnittliche Zuwachsprozent als *geometrisches Mittel* derjenigen der einzelnen Jahre:

(50.1) $$p_{l/j} = \sqrt[l-j]{p_{j\to l}}\ .$$

Welche dieser beiden Approximationen zu einem besseren Ergebnis führen wird, ist in erster Linie davon abhängig, in welcher Weise das Zuwachsprozent sich tatsächlich jeweils verändert.

Man kann auch davon ausgehen, dass das Prinzip des *kontinuierlichen Zinseszinses* angewandt wird, wobei die Bestimmung des Zinsprozents fortdauernd in unendlich kurzen Zeitabständen auf Grund des jeweiligen Kapitals erfolgt. Indem man dabei von dem Betrag ausgeht, der sich auf die Gleichung (45.4) des Wachstums zum entsprechenden Zeitpunkt gründet, ist nach Gleichung (28.3) unter Berücksichtigung dessen, dass $dv = i\ dt$,

(50.2) $$p_i = \frac{d(\log v_i)}{dt_i} = \left[\frac{1}{v_i}\frac{dv_i}{dt_i}\right] = \frac{i_i}{v_i}\,,$$

welches die *Zinsintensität* des Wachstumsvorgangs ausdrückt. Die Funktion des kontinuierlichen Zinseszinsprozents lässt sich also an Hand der logarithmischen Ableitung der Funktion des Wachstums herleiten.

Vergleicht man untereinander die Werte der Summenfunktion (45.2) eines Baumindividuums (= seine Massen) zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten (Jahren) t_i und t_{i+1}, so erhält man für das Verhältnis der beiden den Wert

(50.3) $$k_i = \frac{v_{i+1}}{v_i}\ .$$

Bestimmt man das entsprechende Verhältnis, indem man die Werte der Summenfunktion zu den Grenzzeitpunkten t_j und t_l einer gegebenen Zeitperiode $t_{j\to l}$ zum Ausgangspunkt nimmt, so erhält man für diese Zeitperiode den entsprechenden relativen Wert

(50.4) $$k_{j\to l} = \frac{v_l}{v_j}\ .$$

Der Faktor k wird im folgenden als **Wachstumskoeffizient** bezeichnet werden. Er entspricht strukturell dem Endwertfaktor (vgl. KUUSELA—NYYSSÖNEN 1962, S. 15—16). Im ersteren Fall (50.3) handelt es sich um den **Jahres***wachstumskoeffizienten*, im letzteren (50.4) wiederum um den **Perioden***wachstumskoeffizienten*. Sachgemäss bedeutet die Heranziehung des Koeffizienten, dass man auf Grund desselben zum Ausgangszeitpunkt t_i den Wert des Wachstums zu einem gegebenen späteren Zeitpunkt bestimmen kann:

(50.5) $$v_{i+1} = v_i\, k_i \qquad \text{und}$$
(50.6) $$v_l = v_j\, k_{j\to l}\ .$$

Wenn in der oben angegebenen Gleichung (50.5) der Jahreswachstumskoeffizient zum Zeitpunkt t_{i+1} eingesetzt wird, erhält man

(51.1) $$v_{i+2} = v_{i+1}\, k_{i+1} = v_i\, k_i\, k_{i+1}.$$

Indem man so fortfährt, bis man vom Anfangszeitpunkt t_j der Zeitperiode $t_{j\to l}$ zu ihrem Endzeitpunkt t_l gelangt, ergibt sich

(51.2) $$v_l = v_j\, k_j\, k_{j+1}\, k_{j+2} \ldots k_{l-1} = v_j \prod_{i=j}^{l-1} k_i\ .$$

Werden beide Glieder der Gleichung (51.2) durch v_j dividiert, so ergibt sich für den Wachstumskoeffizient der Zeitperiode $t_{j\to l}$ die Form

(51.3) $$k_{j\to l} = \prod_{i=j}^{l-1} k_i\ .$$

Der *Periodenwachstumskoeffizient* ergibt sich also aus dem *Produkt der* in ihm enthaltenen *Jahreswachstumskoeffizienten.* Entsprechendermassen bildet sich der gemeinsame Wachstumskoeffizient zweier oder mehrerer miteinander zusammenhängender Zeitperioden als Produkt ihrer gesonderten Wachstumskoeffizienten.

Da der Periodenwachstumskoeffizient der Gleichungsform (51.3) gemäss die Struktur eines Produkts hat, *vertritt* sein *Logarithmus* entsprechendermassen die *Summenform*

(51.4) $$\log k_{j\to l} = \sum_{i=j}^{l-1} \log k_i\ .$$

Im Bedarfsfall kann man sich auch den Wachstumskoeffizienten stetig veränderlich denken, wobei sich sein Wert in unendlich kurzen Zeitabständen auf Grund des betreffenden Wachstums ergibt. Die Funktion selbst wandelt sich so von einer diskreten in eine stetige Funktion, und ihre Grenzstellen in der Zeitperiode $t_{j\to l}$ gehen von den Grenzstellen t_j und t_{l-1} der diskreten Funktion zu den Grenzstellen t_j und t_l über.

Wenn man nun den Wachstumskoeffizient als Funktion der Zeit $k = f(t)$ annimmt, wobei entsprechendermassen $\log k = \log f(t) = g(t)$ ist, kann man die Gleichung (51.4) in folgender Form umschreiben:

(51.5) $$\log k_{j\to l} = \int_j^l g(t)\, dt\,,$$

woraus weiter folgt

(51.6) $$k_{j\to l} = e^{\int_j^l g(t)\, dt}\ .$$

Das Wachstum (=die Masse) des Baumindividuums bis zum Zeitpunkt t_i kann entsprechenderweise auf Grund der Gleichung (51.2) dargestellt werden. Theoretisch hat es die Form

(51.7) $$v_i = v_0\, k_0\, k_1\, k_2 \ldots k_{i-1}\ ,$$

wo jedoch der Wert des Produkts $v_0 k_0 = v_1$ *indefinit* ist (vgl. S. 62). Da er tatsächlich auf jeden Fall sehr gering ist, kann man die Gleichung für das Wachstum ebensogut schreiben

(52.1) $$v_i = v_1 \prod_{i=1}^{i-1} k_i \, .$$

Weiter auf die Gleichung (52.1) angewandt, liefert die Form (51.6) für den Betrag des Wachstums zum Zeitpunkt t_i die Gleichungsform

(52.2) $$v_i = v_1 \cdot e^{\int_1^i g(t)\,dt} \, .$$

Alle oben angeführten, den Wachstumskoeffizienten betreffenden Gleichungen (50.3)—(52.2) beziehen sich auf das Wachstum eines einzelnen Baumindividuums.

Es ist natürlich, dass *die entsprechenden Gleichungsformen auch für* Bestände und für andere von Baumindividuen gebildete *Populationen* ausgearbeitet werden können. Statt der Summenfunktion (45.2) wendet man dann nur die entsprechenden, für Bestände gültigen Gleichungsformen an.

Indem man von der Form (48.2) ausgeht, erhält man für den Wachstumskoeffizient eines Bestands (oder einer sonstigen Population von Baumindividuen) den Wert des Wachstumskoeffizienten für die Zeitperiode $t_{j\to l}$ auf Grund der Gleichung (50.6):

(52.3) $$K_{j\to l} = \frac{V_{Wl}}{V_{Wj}} \, .$$

Eine zweite, dem praktischen Bedarf offenbar besser dienliche Alternative ist die Definition des Wachstumskoeffizienten des Bestands auf Grund seiner Masse nach der Summenfunktion (46.2) und der Gleichung (48.3) für die Zeitperiode $t_{j\to l}$:

(52.4) $$K_{j\to l} = \frac{V_j + (V_{Wl} - V_{Wj})}{V_j} \, .$$

Die *letztere Form* ist nämlich für die *praktische Anwendung* deshalb *brauchbarer*, weil den Ausgangspunkt der auszuführenden Prognoseberechnungen fast immer eben die Masse des Holzbestands zu Beginn der Berechnungsperiode ausmacht.

Man findet für die Masse des Bestands mit *n* Baumindividuen am Ende der Zeitperiode $t_{j\to l}$ unter der Voraussetzung, dass in dieser Zeit im Bestand überhaupt kein Abgang stattfindet, die Gleichung

(52.5) $$V_l = K_{j\to l} \, V_j \, .$$

Da sich diese Masse V_l aus den Massen eines jeden dazugehörigen Baumindividuums zusammensetzt, von denen jedes eine Bedingung nach Gleichung (50.6) erfüllt, kann man die vorerwähnte Gleichung in folgender Form schreiben:

(52.6) $$V_l = K_{j\to l} \left(\sum_n v_j\right) = \sum_n v_j \, k_{j\to l} \, ,$$

womit sich dann für den Periodenwachstumskoeffizient des Bestands folgende Gleichungsform ergibt:

(52.7) $$K_{j\to l} = \frac{\sum_n v_j \, k_{j\to l}}{\sum_n v_j} \, .$$

Der *Wachstumskoeffizient einer* gegebenen *Zeitperiode* bildet sich im Bestand somit als *Mittelwert der Wachstumskoeffizienten der* in ihm enthaltenen *Baumindividuen, mit den Massen* zum Anfangszeitpunkt der Zeitperiode *als Gewichte* belegt.

Die Gleichung (52.7) ist stets als solche in Kraft, insofern im Verlauf der Zeitperiode aus dem Bestand überhaupt keine Baumindividuen abgehen. Insofern man wiederum den Abgang berücksichtigen muss, dann wirken die darin enthaltenen Baumindividuen auf den Wert des Bestandeswachstumskoeffizienten nur als Wachstumskoeffizient derjenigen Zeitspanne, während welcher die betreffenden Individuen im Bestand gelegen haben. Die Gleichung (52.7) kann dann in ihrer vollständigen Form auf Grund der Gleichung (52.4) angeschrieben werden.

Die Gleichung (52.7) ist also ausser betreffs eines Bestands auch bezüglich aller anderen von Baumindividuen gebildeten Populationen gültig. Tatsächlich bedeutet dies, dass die *Wachstumskoeffizienten direkt an Hand* von *an* einzelnen *Probebäumen ausgeführten Messungen bestimmt* werden können. Man kann somit jedes Baumindividuum als eigenes, separates Beobachtungsergebnis behandeln, ohne dass es nötig wäre, als Zwischenphase die bestandesweisen Beträge zu bestimmen (vgl. S. 40). Dies trägt zu einfacherer Behandlung der Messungen bei. Indem man von jedem Objekt nur einzelne Probebäume nimmt, hat man auch die Möglichkeit, durch Erhöhen der Anzahl der Messungsobjekte mit gleichem Arbeitsaufwand die Repräsentativität des Materials zu erhöhen und dadurch die Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu steigern.

33. KONSTRUIEREN DES REGRESSIONSMODELLS ZUM BESCHREIBEN DES WACHSTUMSVORGANGS

Die im folgenden zur Darstellung kommende Betrachtung geht, sowie auch nachstehend *in dieser Untersuchung* die Betrachtung der Wachstumsanalyse überhaupt, vom *Anwenden von Regressionsmodellen* aus. Prinzipe entsprechender Art treten auch beim eventuellen Anwenden von stochastischen Modellen anderer Art zum Veranschaulichen der Wirkungs- und Abhängigkeitsbeziehungen im Wachstumsvorgang in Erscheinung.

Die auf der Grundlage des im vorigen Kapitel besprochenen Grundmodells aufgebauten Wachstumsfunktionen gestalten sich in der Regel mehr oder weniger kompliziert. Wenn man daran geht, ein den Trend des Wachstumsvorgangs beschreibendes Regressionsmodell zu konstruieren, wird man daher natürlich bestrebt sein, für diese Abhängigkeitsbeziehung eine möglichst zweckmässige Form zu finden. Hierbei hat man im allgemeinen zwischen zwei entgegengesetzten Tendenzen die optimale Lösung zu wählen. Einerseits muss man versuchen, mittels des Regressionsmodells möglichst genau den Wachstumsvorgang selbst zu beschreiben, während es wieder andererseits mit Rücksicht auf das Ausführen des Schätzens möglichst brauchbar sein soll (vgl. S. 30). Vom Standpunkt der ersten Forderung kann das effektivste Modell auch durch Anwendung einer geeigneten Transformation auffindbar sein (vgl. S. 31). Für die Zweckmässigkeit beim Schätzen wiederum dürfte das *Regressionsmodell als linear viele bedeutungsvolle Vorteile mit sich bringen.*

Eben infolge rechnerischer Schwierigkeiten ist die praktische Bedeutung vieler sonst brauchbaren Wachstumsfunktionen recht gering (vgl. z.B. WECK 1950b, PRODAN 1961, SCHNEIDER 1963, LIEBOLD 1962). Die verschiedenen diesbezüglichen Möglichkeiten können allerdings heutzutage ganz anders als vor der Ingebrauchnahme der Datenmaschinen ausgenutzt werden. Wann *die Verwertung der Funktion selbst* nicht möglich ist, kommt als naheliegendste Alternative die *Verwendung einer* geeignet einfachen *Transformation* in Frage (s. z.B. DRAPER—SMITH 1966, S. 131—134). Oftmals ist es auch möglich, ein *Iterationsverfahren anzuwenden* (vgl. z.B. NIKLAS—MILLER 1926, S. 700—701, WILLIAMS 1959, S. 59—61; vgl. auch DEMING 1948, S. 115—125) oder die Funktion *durch eine approximative Formel zu ersetzen* (vgl. z.B. S. 68 und PESCHEL 1938, S. 198—202). Als eine weitere Möglichkeit, zu einem zweckmässigen Ziel beim Schätzen einer Wachstumsfunktion zu gelangen, könnte man in gewissen Fällen sich die *Verwertung der Ableitungsfunktion* denken, beispielsweise dann, wenn sie einfacher als die Wachstumsfunktion selbst ist, und daher die Zahl der gleichzeitig zu schätzenden Parameter herabsetzt (vgl. S. 68). Ein derartiges Vorgehen setzt ja voraus, dass man aus dem Beobachtungsmaterial die Beobachtungswerte für die in der Ableitungsfunktion in Frage kommende abhängige Variable herausbringen kann, was im Falle des Wachstums der Bäume wohl möglich sein dürfte.

Wenn in der vorliegenden Untersuchung Regressionsmodelle mit dem eigentlichen Schätzen verknüpft werden, werden diese immer linear angewandt. Dabei wird auch stets *hinsichtlich der Symbole ein einheitliches Verfahren* befolgt. So wird die zu erklärende (abhängige) Variable der zu schätzenden Wachstumsfunktion nach der üblichen Weise im Falle von Beobachtungswerten mit y und die Schätzung selbst mit $\hat{y}$ bezeichnet. Von den erklärenden (unabhängigen) Variablen wird das beim Darstellen des Wachstumsvorgangs als Hauptveränderliche auftretende Alter stets mit dem Symbol x gekennzeichnet, und dieses Symbol wird für keinen anderen Wachstumsfaktor verwendet. Dagegen kann sein Auftreten im Schätzmodell in Gestalt mehrerer unabhängiger Variablen in Frage kommen, wobei dann die verschiedenen Symbole durch Indizes voneinander unterschieden werden. Für die zusätzlichen Veränderlichen wird in der Regel nur das Symbol z bei Bedarf mit nötigen Indizes benutzt. Ein und dieselben Buchstabensymbole sind nicht in den eigentlichen Wachstumsfunktionsformen und in deren Schätzmodellen verwendet worden, damit keine Unklarheit darüber entstehen kann, um welche Art von Modell es sich jeweils handelt.

Im Zusammenhang mit der Betrachtung derjeniger Wachstumsfunktionen, auf denen basierende Berechnungen in der Behandlung des Demonstrationsmaterials enthalten sind, wird auch die Form des beim Schätzen zur Anwendung gebrachten Regressionsmodells angegeben. Die Symbole der zusätzlichen Veränderlichen sind wiederum in Verbindung mit jedem Demonstrationsfall beschrieben.

Zwecks Vereinfachung der Betrachtung wird im Folgenden der die zusätzlichen Veränderlichen betreffende Teil des mathematischen Modells des Wachstumsvorgangs direkt auf Grundlage der linearen Schätzmodelle dargestellt. Dieses Vorgehen bringt offenbar auch am anschaulichsten die Beziehungen zwischen der Hauptveränderlichen und den zusätzlichen Veränderlichen bezüglich des Modells des gesamten Wachstumsvorgangs zum Ausdruck.

34. WIRKUNG DER ÜBRIGEN WACHSTUMSFAKTOREN

341. Berücksichtigung der messbaren Wirkung

Wenn die zusätzliche Veränderliche zur Erklärung in messbarer Form verwendet wird, kann man das *allgemeine Prinzip* der Regressionsbeziehung in folgender Form darstellen:

(55.1) $$y = \bar{y} + b_x[f(x) - \overline{f(x)}] + b_z[g(z) - \overline{g(z)}] + \Delta y,$$

worin der zu beschreibende *Wachstumsvorgang* als abhängige Variable y auftritt, während die wirksamen Wachstumsfaktoren von der Funktion $f(x)$ des *Alters* und von der Funktion $g(z)$ der *zusätzlichen Veränderlichen*, sowie der Betrag des betreffenden *Residuals* (s. S. 78) von Δy vertreten sind. Es hängt letzten Endes vom Aufbau dieser Funktionen $f(x)$ und $g(z)$ sowie von ihrer gegenseitigen Beziehung namentlich bezüglich ihrer Konstruktion ab, wie effektiv sich die Wirkung der zusätzlichen Veränderlichen in der Gesamtinformation geltend macht.

In ihrer einfachsten Form, d.h. wenn $g(z) = z$ ist *(Dem.B. 123_3* und *125_3)*, erhält die Gleichung (55.1) die Form

(55.2) $$y = \bar{y} + b_x[f(x) - \overline{f(x)}] + b_z(z - \bar{z}) + \Delta y,$$

die also die Abweichungen direkt vom Mittelwert der zusätzlichen Veränderlichen ausgehend bemisst. Eine solche Form ist jedoch betreffs der Regression nicht anpassungsfähig, denn sie setzt voraus, dass die Wirkung der betreffenden Wachstumsfaktoren (z) auf das Wachstum (y) vom Alter unabhängig gleich bleibt.

Je eingehender jedoch das Wesen der Beziehung zwischen diesen bei der zusätzlichen Veränderlichen verfolgt werden kann, umso effektiver wird ihrerseits ihr Anteil an der Regressionsbeziehung. Indessen darf sich die Funktion selbstverständlich wegen der zusätzlichen Veränderlichen nicht so kompliziert gestalten, dass sie deshalb gänzlich ihre Bedeutung verliert. Das Finden eines geeigneten Mittelwegs zwischen diesen miteinander im Widerspruch stehenden Zielen ist letzten Endes der Erwägung anheimgestellt.

Wenn man bestrebt ist, in der Funktionsform (55.1) den Anteil der zusätzlichen Veränderlichen effektiver zu gestalten, kann man von dem Gedanken ausgehen, dass sie in der Regressionsbeziehung eine derartige Wirkung ausübt, dass es schliesslich *eine Abweichung von ihrem* bestimmten regelmässigen Verlauf, ihrem **Standardniveau** ist, die in gewisser Weise *den Betrag des Wachstums verändert.* Dieses Prinzip kommt in der Funktionsform am einfachsten zum Ausdruck, wenn die zusätzliche Veränderliche die Form $g(z) = \frac{z}{\mathbf{z}}$, hat, was bei der Berechnung in logarithmischer Transformation zur Form $g(z) = z - \mathbf{z}$ führt. Diese Form ist natürlich möglich auch im Fall der Wachstumsfunktion selbst. Hierbei vertritt z den tatsächlichen Wert der zusätzlichen Veränderlichen und $\mathbf{z}$ den Wert des entsprechenden Standardniveaus. Seine Funktion kann ja jede beliebige Art der Regressionbeziehung haben. Wenn jedoch auch sie eine Funktion der Hauptveränderlichen ist, d.h. $z = h(x)$, wird die endgültige Regressionsgleichung die einfachste Form bilden. Sie wird jetzt in ihrer rechnerischen Form mit dem unmittelbaren Verhältniswert als Grundlage wie folgt sein:

(56.1) $$\hat{y} = a + b_x f(x) + b_z \frac{\mathfrak{z}}{z}$$

und im logarithmischen Gegenstück:

(56.2) $$\hat{y} = a + b_x f(x) + b_z(\mathfrak{z} - z)\,.$$

Vom Standpunkt des Berücksichtigens der zusätzlichen Veränderlichen ist es im letzteren Fall hierbei *von ausschlaggebender Bedeutung, welche Form die Funktion* $h(x)$ *vertritt.* Falls diese kompliziert in ihrer Konstruktion ist und zugleich stark von der Funktionsform der Hauptveränderlichen $f(x)$ abweicht, gestaltet sich die Regressionsgleichung leicht sehr umständlich und der aus der Massnahme erwachsende Nutzen wird fragwürdig. Zu einem brauchbaren Ergebnis kann man denn auch in erster Linie über zwei verschiedene Alternativen gelangen. Einerseits kann die Funktion $h(x)$ in dermassen *einfacher Form sein,* dass sie nicht aus diesem Grunde zu einer komplizierten Anwendung führt. Die zweite Möglichkeit ist, dass sie entweder selbst hinsichtlich ihrer Form möglichst weitgehend derjenigen der Hauptveränderlichen $f(x)$ entspricht oder mit hinreichender Genauigkeit *durch eine* solche *Funktion* $h'(x)$ *ersetzt werden kann,* die dieser Voraussetzung gerecht wird. Falls diese Zuordnung als vollkommen erachtet werden kann, wird in der anzuwendenden Regressionsgleichung die Differenz zwischen den Funktionen der Haupt- und zusätzlichen Veränderlichen $b_x f(x) - b_z h'(x)$ von gleicher Form wie die Funktion der Hauptveränderlichen sein, was beispielsweise in Verbindung mit der Gleichung (56.2) in der Regressionsgleichung durch Einbeziehen der zusätzlichen Veränderlichen nur das zusätzliche Glied $b_z \mathfrak{z}$ hervorrufen wird (vgl. *Dem.B. 119,* 124_2). Die soeben beschriebenen Alternativen sind gegebenerweise keine notwendige Bedingung für ein anwendbares Ergebnis. Allgemein kann man nur sagen, dass die Art des Einbeziehens der zusätzlichen Veränderlichen umso zweckmässiger ist, mit je geringerer Abänderung der von der Hauptveränderlichen bestimmten Konstruktion der Regressionsfunktion das von ihr gewonnene Mehr an Information verwertet werden kann *(Dem.B. 112).*

Wenn also die Regressionsbeziehung der zusätzlichen Veränderlichen zur Hauptveränderlichen bekannt oder aus dem Beobachtungsmaterial schätzbar ist, kann man noch einen Teil der scheinbaren Wirkung der zusätzlichen Veränderlichen zugunsten der Hauptveränderlichen eliminieren. Jene behält somit endgültig ihre Wirkung in der Regressionsgleichung nur in dem Teil bei, in welchem ihr beobachteter Wert von dem Wert des Standardniveaus der Funktion $h(x)$ abweicht. Indem man so verfährt, kann man die Form der Regressionsfunktion in vielen Fällen mit Hinsicht auf den praktischen Bedarf zweckmässiger als sonst konstruieren. Es ist jedoch immer zu erwägen, dass ein solches Vorgehen nicht

etwa auf Grundlagen geschieht, die die Beinhaltung einer vielleicht sehr peinlichen Verfälschung im Regressionsmodell nach sich ziehen.

Die zusätzlichen Veränderlichen können in der Regressionsbeziehung auf zwei alternative Weisen mit einbezogen werden: Erstens kann man sie *unmittelbar* in einer Regressionsbeziehung gemeinsam *mit der Hauptveränderlichen eingliedern,* wobei die gegenseitige Abhängigkeit beider in der Regressionsgleichung selbsttätig Berücksichtigung finden. Zweitens ist es möglich, sie getrennt *zur Erklärung der Streuung* heranzuziehen, *die* die erste, ausschliesslich auf der Hauptveränderlichen basierende Phase der Wachstumsanalyse *nicht erklärt* hat. Diese beiden, die als parallele Alternativen zu erachten sind, werden im Nachstehenden (S. 73—77) gesondert betrachtet. Ihre Günstigkeit im Vergleich zueinander variiert offenbar von Fall zu Fall, und zwar sogar in dem Grade, dass bisweilen nur eine der beiden tauglich ist. Die Frage der Zweckmässigkeit ihrer Anwendung ist somit stets getrennt zu untersuchen *(Dem.B. 113,* 114_2).

In diesem Zusammenhang ist es vielleicht angebracht, kurz eine Art der Berücksichtigung der Wirkung der zusätzlichen Veränderlichen zu berühren, die man oft auf die Wachstumsanalyse angewandt hat. Das fragliche Vorgehen ist das Transformieren der Beobachtungsergebnisse mittels Korrektionsfaktoren gegebener Art vor dem Ausführen der Analyse. Am bekanntesten dürfte der sog. *Jahrringindex* sein, mit Hilfe dessen man danach strebt, die Ergebnisse der Zuwachsmessungen auf ein Durchschnittsniveau zu bringen (vgl. z.B. ASSMANN 1961, S. 194). Allgemein gesehen versucht man mittels solcher Korrektionsfaktoren aus dem Material vom Standpunkt des Endergebnisses unwesentliche, aber in ihrer Wirkung störende Variation auszuschalten. Sie sind gewöhnlich auf Grund besonderer Messungen berechnete Koeffizientenwerte, die allgemeine Mittelwertzahlen repräsentieren dürften. Auf diese Weise ist z.B. das im Demonstrationsmaterial enthaltene Kiefernmaterial von NYYSSÖNEN und Fichtenmaterial von VUOKILA korrigiert worden.

Es ist auch möglich, *derartige Korrektionsfaktoren* zu berücksichtigen, indem man sie *als erklärende* zusätzliche *Veränderliche* in der Regressionsgleichung mit *eingliedert.* Es scheint offenbar, dass ein solches Verfahren zu einem vom Standpunkt des Gesamtergebnisses effektiveren Ziel als das oben beschriebene Vorgehen führt. Allgemeine Voraussetzung für die Anwendung solcher Korrektionsfaktoren ist jedoch, dass sie tatsächlich der betreffenden Variation im Beobachtungsmaterial entsprechen. Indem man sie unter dieser Bedingung im Regressionsmodell mit eingliedert, hat man zugleich die Möglichkeit, die Signifikanz ihrer Korrekturwirkung zu messen, und zwar sowohl für den unter Interpretation stehenden Wachstumsvorgang an sich als auch gesondert in Hinsicht auf die Zuverlässigkeit der geschätzten Wachstumsfunktion.

Wenn man annimmt, dass das Messungsergebnis eines gegebenen Zeitpunkts mit dem variablen Faktor c korrigiert ist, dann wendet man den Zuwachsbetrag bei der Rechnung in der Form $c{\cdot}i$ an, und die Wachstumsfunktion wird somit folgende Form haben:

(57.1) $$c\,i = f(t)\,.$$

Wenn man hiervon zur logarithmischen Form übergeht, gelangt man durch Transposition des Glieds $\log c$ zu einer der Gleichungsform (55.1) entsprechenden Regressionsbeziehung,

(57.2) $$\log i = \log f(t) - \log c\,,$$

in welcher die zusätzliche Veränderliche in der Funktionsform $g(z) = -(\log c)$ auftritt.

342. Berücksichtigung der Wachstumsfaktoren mittels qualitativer Klassifizierung

Die *Grenze* zwischen messbarer und qualitativer Variation ist, wie schon vorn (S. 37) dargelegt wurde, in mancher Beziehung *unbestimmt und schwankend.* Ein beträchtlicher *Teil der messbaren Variation* muss daher *qualitativ* behandelt werden, *weil sie nicht in brauchbarer Weise mit Mass versehen werden kann.* Man kann zwar danach streben, die Klassen der qualitativen Variation in dieser oder jener Weise zu bemessen und diese Werte in der Regressionsbeziehung für die betreffenden Klassen zu verwenden. Als Beispiel eines solchen, auf Grund des Beobachtungsmaterials selbst erfolgten Vorgehens mag das von NÄSLUND (1944, S. 57—61) auf die Waldtypen angewandte Verfahren genannt werden (vgl. S. 80; s. auch JONSSON 1962, S. 55—57). Auch kann die als qualitativ interpretierbare Variation an irgendeine deutlich messbare, stetige Variable gebunden werden. Ein Beispiel für die Anwendung einer solchen, auf ausserhalb des Beobachtungsmaterials gewonnenem Material basierenden Bemessung zeigt das von KUUSELA und KILKKI (1963, S. 7—9) angewandte Verfahren, in dem die Bonität an die Oberhöhe des Bestandes gebunden ausgedrückt wird. Die Anwendung aller den oben beschriebenen ähnlichen Mittel ist selbstverständlich immer der Erwägung anheimgestellt, und ihre Bedeutung bleibt davon abhängig, wie erfolgreich man eine solche Bemessung ausführen kann. Z.B. ist bei dem von KUUSELA und KILKKI benutzten Verfahren sein Wert letzten Endes davon abhängig, *wie eng die Korrelation* zwischen der Bonität und der Oberhöhe *in Wirklichkeit ist.*

Der mit dem obengenannten, von NÄSLUND angewandten Verfahren verknüpfte Gedanke bedeutet also Analysieren der qualitativen Variation, indem man ihre Klassen auf Grund einer geeigneten Regressionsbeziehung mit Mass versieht. Zwar entspricht dies inhaltlich nur der Bestimmung von Mittelwerten für eine jede Klasse im Beobachtungsmaterial. Man kann jedoch nicht in Abrede stellen, dass ein solches Verfahren gewisse Vorteile besitzt (vgl. auch DRAPER—SMITH 1966, S. 134—136).

Im allgemeinen ist es möglich, eine gegebene qualitative Abhängigkeitsbeziehung so zu prüfen, dass man jede ihrer Klassen gesondert auf Grund ihres eigenen Beobachtungsmaterials bemisst. Doch kann, da die Menge des Beobachtungsmaterials dabei je Klasse viel geringer ausfällt, die Wirkung der zufälligen Variation in Ergebnissen zu Uneinheitlichkeiten und sogar zu Inkonsequenzen führen, auch wenn das in Anwendung gebrachte Regressionsmodell im übrigen völlig brauchbar wäre. Erfolgt hingegen *das Schätzen der Regressionsbeziehungen unter Behandlung des ganzen Materials als ungeteilte Gesamtheit,* so wird die Bemessung bei jeder Klasse gewissermassen in Anlehnung an die

übrigen geschehen (vgl. S. 80—81). Auf diese Weise kann sich die Verschiedenheit der Zufallsvariation in den verschiedenen Klassen nicht so störend auf die zwischenklasslichen Beziehungen auswirken.

Die mit dem von NÄSLUND angewandten Prinzip verknüpfte Idee setzt jedoch voraus, dass in dem Betrag der Regressionsbeziehung (d.h. in den Regressionskoeffizienten) zwischen den Klassen der qualitativen Variation kein wesentlicher Unterschied besteht. In der Regel zeigt sich doch Unterschiedlichkeit zwischen den Klassen eines qualitativen Wachstumsfaktors in ihrer Wirkung sowohl auf die Wachstumsgeschwindigkeit als auch auf das Wachstumsniveau. Die Frage, ob man dann versuchen soll, auch die Unterschiede in der Regressionsbeziehung zu bemessen, kann nicht allein auf Grund ihrer statistischen Signifikanz entschieden werden. Wenigstens gleich oft ist dies *eine Frage der Zweckmässigkeit,* deren Entscheidung der subjektiven Erwägung überlassen ist. Dabei stellt begreiflicherweise *die Signifikanzanalyse* der Unterschiede *ein* vorzügliches *Hilfsmittel* dar, das man stets versuchen sollte zu verwerten. Jedoch ist es, wenn dies beispielsweise aus rechenerischen Ursachen nicht möglich oder aus sonstigen Gründen nicht zweckmässig sein sollte, nicht immer angebracht, Unterschiede zwischen den Klassen eines qualitativen Wachstumsfaktors in der Regressionsbeziehung zu bemessen, sondern man wird sich gegebenenfalls mit der Bemessung ihrer Regressionsmittelwerte begnügen (vgl. S. 99).

Als eigentliches *Mittel zur Analyse* der qualitativen Variation kommt jedoch *in erster Linie die Signifikanztestung der Unterschiede* zwischen ihren verschiedenen Klassen mittels eines geeigneten mathematisch-statistischen Verfahrens in Frage (vgl. hierüber z.B. COCHRAN 1957, KENDALL 1965 und HUITSON 1966). In späterem Zusammenhang werden einige zu diesem Zweck geeignete alternative Mittel näher betrachtet. *Als Ziel* solcher Analyseverfahren ist von dem hier besprochenen Standpunkt aus letztlich eine solche *Gestaltung der Klassifizierung* der qualitativen Variation anzusehen, dass die benutzten Klassen sich hinsichtlich der Variation des betreffenden Wachstumsfaktors untereinander signifikant unterscheiden. Wenn man also feststellt, dass dies zwischen zwei gegebenen Klassen nicht der Fall ist, ist das Zusammennehmen derselben vom Standpunkt dieses Wachstumsfaktors motiviert. Es ist natürlich immer möglich, dass in solchem Fall andere Gründe das Beibehalten der Klassen motiviert erscheinen lassen. Es versteht sich, dass ein solches Testverfahren *keinerlei Kriterium für* eventuelles *Zerlegen* bereits gebildeter Klassen abgibt. Diese Tatsache führt denn auch dahin, dass es zweckmässig ist, beim Untersuchen der Wirkung qualitativer Faktoren *vorbereitend eine genügend in Einzelheiten gehende Gruppierung* zu benutzen, auf Grund welcher an Hand der Prüfung des Beobachtungsmaterials die endgültige Klasseneinteilung dann erfolgen kann. Ein solches ideales Vorgehen kann man jedoch nicht oft zur Ausführung bringen, weil keine brauchbaren Grundlagen für die Bildung einer eine gewisse Grenze überschreitenden Zahl von Klassen zur Verfügung stehen, oder wenn die Voraussetzungen hierfür sonstwie fehlen.

4. AUF DEM ALTER BASIERENDE WACHSTUMSFUNKTIONSTYPEN

41. DER ALLGEMEINE VERLAUF DER VERSCHIEDENEN FUNKTIONSTYPEN

411. Der Funktionstyp des Zuwachses

Die *den Zuwachs i* des Baumindividuums wiedergebende Verteilungsfunktion (45.1), von der man erachten kann, dass sie *den Betrag der Wachstumsintensität widerspiegelt* (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 276), ist im Normalfall eine eingipfelige Kurve mit dem Punkt $t_0 = 0$, $i = 0$ als Ausgangspunkt, die entsprechend dem Wert $i = 0$ zum Zeitpunkt T des Altertods des Baums zurückkehrt. Diese Abschlussphase kommt nur bei Wäldern im Naturzustand in Frage, da in Wirtschaftswäldern die Hauungsmassnahmen das Wachstum der Baumindividuen gewöhnlich schon lange vor Erreichen dieser Grenzphase unterbrechen. In den Zuwachsmodellen ihrerseits muss man oft der Konstruktion der Funktionsform zufolge für den letzteren Grenzwert $i \to 0$ bei $t \to \infty$ in Anwendung bringen (vgl. z.B. THOMASIUS 1964, S. 719).

Auch die allgemeine Form der Funktion des Zuwachses kann offenbar in verschiedenen Gebieten verschieden sein. Es ist als *normal* anzusehen, dass die Entwicklung des Baumindividuums *eine* deutliche *Maximalphase* aufweist, vor welcher der Betrag des Zuwachses stetig zunimmt und nach welcher sein Betrag entsprechend abnimmt. In Wirtschaftswäldern ist es gewöhnlich, dass das Baumindiduum nicht einmal Zeit hat, seine Maximalphase zu erreichen oder deutlich zu überschreiten, sondern dass es zuvor schon gefällt wird. Ausnahmsweise kann bei einem Baumindividuum keine deutlich lokalisierte Gipfelphase des Zuwachses auftreten. Zum normalen Verlauf des Zuwachses gehört ferner, dass *zu beiden Seiten* der maximalen Phase *je ein Wendepunkt* der Zuwachsgeschwindigkeit beobachtet werden kann, dessen Lage und Ausgeprägtheit jedoch in verschiedenen Fällen sehr verschieden sein kann. Der Zuwachs vermehrt sich also anfangs nur langsam, beschleunigt sich beim Passieren des ersten Wendepunktes besonders stark, und wird von neuem langsamer bis zum Erreichen des Maximums. Nach der Kulmination beginnt er herabzugehen und zwar anfangs schroff, nach dem späteren Wendepunkt aber unter dauernder Verlangsamung, umso stärker, je mehr sich der Baum dem Zeitpunkt des Alterstods nähert. Normalerweise erfolgt die *Abnahme* des Zuwachses nach der Kulmination *weit langsamer als* seine *Zunahme* vor derselben, weshalb die Zuwachskurve asymmetrische Form hat (vgl. PRODAN 1961, S. 332).

Wenn man die Form der Ableitungsfunktion der Zuwachsfunktion betrachtet, welche die *Zuwachsgeschwindigkeit* wiedergibt, findet man als charakteristischen Zug ihre *deutliche Periodizität* mit ihren Wendepunkten als Maximum- und Minimumstellen. Deren gegenseitige Beziehung ist jedoch dadurch gekennzeichnet, dass der Maximalwert der Zuwachsgeschwindigkeit seinem absoluten Betrag nach den Minimalwert übertrifft, und zwar in der Regel offenbar sogar bedeutend. Da sich der Zuwachs umso langsamer ändert, je älter der Baum wird, und zugleich viel länger nach seiner Maximalphase anhält, als es bis zum Erreichen desselben gedauert hat, empfiehlt es sich, die Zeit beim Beschreiben des Wachstumsvorgangs in einen für diese Abnahmetendenz geeigneten Masstab zu transformieren (vgl. S. 22 und BLANCKMEISTER 1956, S. 104—108). In dem Modell des Zuwachses regulieren die Länge der zunehmenden Phase und die Lage ihrer Kulmination die Länge der daran anschliessenden abnehmenden Phase und somit auch den Zeitpunkt des endgültigen Stillstands des Wachstums. Nach der Auffassung von BACKMAN (1943., S. 22) besitzen die Werte $\pm\sqrt{\frac{n}{2}}$ der organischen Zeit (s. S. 66), worin n eine ganze Zahl ist, besondere Bedeutung als Grenzpunkte der Lebensquanten der Lebewesen derart, dass die Werte $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ die Kulmination des Zuwachses vertreten, der Wert $\sqrt{\frac{0}{2}}$ die volle Reife sowie der Wert $+\sqrt{\frac{2}{2}}$ den Beginn der Senilität und der Wert $+\sqrt{\frac{3}{2}}$ den Zeitpunkt des natürlichen Alterstods.

412. Der Funktionstyp des Wachstums

Die das Wachstum v beschreibende Funktion, welche die Summenfunktion (45.3—4) des Zuwachses ist, wird durch *eine schwach S-förmige Kurve* wiedergegeben, die vom Zeitpunkt t_0 des Ausgangs des Wachstumsvorgangs an monoton ansteigt, bis sie beim völligen Aufhören des Wachstums ihren Maximalwert v_T zum Zeitpunkt T des Altertods des Baums erreicht. Auch beim Konstruieren dieses Funktionstyps kommt jedoch meistens in Frage, dass sich die Funktion asymptotisch bei $t \to \infty$ der hierbei als Asymptotwert auftretenden maximalen Masse nähert ($v \to v_T$) (vgl. THOMASIUS 1964, S. 716) Die Wachstumsfunktion folgt in ihrem Verlauf den Phasenpunkten der Funktion ihrer eigenen *Wachstumsgeschwindigkeit*, d.h. des Zuwachses derartig, dass sie anfangs langsam, aber beschleunigt zunimmt, bis sie in der Maximalphase des Zuwachses ihren Wendepunkt hat. Von hier an nimmt sie dauernd ab, zuerst merklicher, aber fortschreitend dauernd, so dass das Wachstum in den letzten Lebensstadien des Baums eine lange Zeit hindurch fast unverändert bleiben kann.

Von diesem normalen Verlauf des Wachstums treten gegebenerweise entsprechend Ausnahmen auf, die bereits vorher in Verbindung mit der Zuwachsfunktion hervorkamen. Namentlich kann sich im Wachstum in gewissen Fällen überhaupt keine Wendephase einstellen, sondern die Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit verlangsamt sich von Anfang an stetig.

Die *Ableitungsfunktion* der Wachstumsfunktion ist, wie sich bereits ergeben hat, *die Funktion des Zuwachses*, deren Eigenschaften soeben besprochen wurden. Dieser Zusammenhang der beiden Funktionstypen hat selbstverständlich seinen eigenen Belang, insofern man parallele Funktionsformen der beiden Typen ausarbeiten und damit in der Betrachtung des Wachstumsvorgangs grössere Einheitlichkeit schaffen kann (vgl. z.B. MICHAJLOW 1952, S. 371—374).

413. Der allgemeine Verlauf der Wachstumskoeffizientenfunktion

Der Wachstumskoeffizient kann als Wiedergabe des *relativen Betrags des Wachstums* und das entsprechende Zuwachsprozent als Wiedergabe der *relativen Wachstumsgeschwindigkeit* (vgl. BERTALANFFY 1951, S. 276) angesehen werden. Da beide somit in ihrer Konstitution in engem Zusammenhang miteinander stehen, trifft das, was im folgenden über den Wachstumskoeffizienten gesagt wird, in geeigneten Punkten auch auf das Zuwachsprozent zu. Daher beschränken wir auch die Betrachtung auf den ersteren allein, und das Zuwachsprozent wird somit in Verbindung mit der vorliegenden Untersuchung nicht näher besprochen.

Die allgemeine Form des Wachstumskoeffizienten k ist in den Gleichungen (50.3) und (50.4) angegeben. Bei Betrachtung der Änderung des Jahreswachstumskoeffizienten als Funktion des Alters bezüglich eines Baumindividuums bildet den Ausgangspunkt seine Masse zum Ausgangszeitpunkt t_0 des Wachstumsvorgangs mit dem Wert $v_0 = 0$. Diesem *Zeitpunkt* t_0 wird somit ein Wachstumskoeffizient $k_0 = v_1/v_0$ zugeordnet sein, der *den Wert* $k_0 = \infty$ *hat.* Von diesem Grenzwert *nimmt der Wachstumskoeffizient* mit zunehmendem Alter t_i *stetig ab*, da der in der Funktion (50.3) als Divisor auftretende Wert v_i dauernd zunimmt. Wenn sich das Alter dem Zeitpunkt des Altertods des Baums nähert $(t_i \to T)$, nähert sich auch der Betrag des jährlichen Zuwaches dem Wert $(v_{i+1} - v_i) \to 0$, während die Masse zunimmt $(v_i \to v_T)$ mit der Folge, dass der Wert des Wachstumskoeffizienten *sich seinem zweiten Grenzwert* $k_T \to 1$ *nähert.* Die Form der Wachstumskoeffizientenfunktion ähnelt daher einer Hyperbel. Sie hat die Geraden $t = 0$ und $k = a < 1$ als Asymptoten und schneidet die Gerade $k = 1$ zum Zeitpunkt T.

Während das Verhältnis der Verteilungs- und Summenfunktionen (45.1) und (45.2) das Zuwachsprozent ausdrückt, vertritt der Wachstumskoeffizient seinerseits das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Werte der Summenfunktion. Wenn die Formen der betreffenden Funktionen bekannt sind, kann man aus diesen selbsverständlich die Wachstumskoeffizientenfunktion herleiten. Da hierbei der Quotient zweier Funktionen in Frage steht, gelangt man auf diese Weise im allgemeinen zu sehr komplizierten Funktionsformen .

Die Wende- und Maximalphasen der Zuwachsfunktion kommen in der Wachstumskoeffizientenfunktion nicht zum Vorschein. Der Einfluss der stetig zunehmenden Wachstumsfunktion verdeckt als Divisor die in diesen Phasen stattfindende Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit. Ein zweifellos vollends hinreichender Ausgangspunkt für die den Wachstumskoeffizienten beschreibenden Funktionsformen ist, wenn man eine *gleichmässige Veränderung* der Funktion voraussetzt.

Da die Ableitungsfunktion der Wachstumskoeffizientenfunktion die Geschwindigkeit in der Änderung des Wachstumskoeffizienten wiedergibt, bedeutet dies, dass die Ableitung $\frac{dk}{dt} = f'(t)$ der Wachstumskoeffizientenfunktion $k = f(t)$ den Zuschuss $dk = k_{i+dt} - k_i$ angibt, den der Wachstumskoeffizient im Zeitintervall $t_{i+dt} - t_i$ erhält. Es sei übrigens bemerkt, dass dem engen prinzipiellen Zusammenhang der beiden Grössen zufolge dieser Zuschuss der entsprechenden Zunahme des Zuwachsprozents gleich ist.

Für das Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion bildet den Ausgangspunkt die Gleichung (51.2), in logarithmische Fassung gebracht:

(63.1) $$\log v_l = \log v_j + \sum_{i=j}^{l-1} \log k_i \, .$$

Die *Jahreswachstumskoeffizienten* sind in dieser Gleichung *in Form einer Summe* enthalten, wobei das Prinzip der Zinseszinsberechnung auch in theoretisch korrekter Fassung enthalten ist, obgleich je nach der Länge einer jeden Messungsperiode mehrere Jahreswachstumskoeffizienten in einer Beobachtung enthalten sind.

In rechnungsmässig geeignete Form lässt sich die Gleichung (63.1) folgendermassen bringen:

(63.2) $$\log v_l - \log v_j = \Delta(\log v)_{j \to l} = \sum_{i=j}^{l-1} \log k_i \, .$$

Anstelle des Wachstumskoeffizienten wiederum kann man in der Gleichung eine geeignete Regressionsfunktion $\log k = f(t)$ einsetzen, womit sie folgende Form erhält:

(63.3) $$\Delta(\log v)_{j \to l} = \sum_{i=j}^{l-1} f(t_i) \, ,$$

in welcher Form sich die Rechnungen am besten ausführen lassen.

42. BESPRECHUNG EINIGER FUNKTIONSFORMEN

421. Funktionen des Zuwachses

Aus der grossen Menge verschiedener Funktionsformen, die im Schrifttum zum Beschreiben des Zuwachses bisher publiziert worden sind, sind im Zusammenhang mit der vorliegenden Untersuchung zur näheren Betrachtung nur die zwei nachstehend besprochenen Funktionsformen herausgegriffen worden, weil sie vorläufig am besten ihrem Zweck zu entsprechen scheinen. Ihre Wahl ergab sich sogar aus zwei verschiedenen Gründen: Sie scheinen erstens sowohl in ihren theoretischen Grundlagen als auch hinsichtlich ihrer allgemeinen Anwendbarkeit am besten den an die Zuwachsfunktion zu stellenden Anforderungen gerecht zu werden. Ferner haben sie den Vorteil, dass an Hand von ihnen das Ausführen der Rechnung in der Praxis verhältnismässig einfach ist. In getrennten Einzelfällen können gegebenerweise andere Gleichungsformen zu besseren Ergebnissen führen.

Die Funktionsform, die sehr allgemein beim Beschreiben der verschiedenartigsten Wachstumserscheinungen Anwendung gefunden hat,

(64.1) $$i = q\,t^m\,e^{-kt}$$ (KOLLERS Funktion),

eignet sich auch zum Beschreiben des Zuwachses *(Dem.B. 88, 118)*. Zu diesem Zweck wurde sie erstmalig von KOLLER im Jahre 1886 vorgeschlagen (PESCHEL 1938, S. 197), nach dem sie folglich in der vorliegenden Untersuchung benannt werden soll.

Ihre Herleitung als formal-mathematische Funktion hat PESCHEL (op.c., S. 193—197) eingehend dargestellt. Nach seiner Auffassung erfüllt sie jedoch in dieser allgemeinen Form nicht die bei einer Wachstumsfunktion notwendigen Voraussetzungen, da man sie nicht durch Integrieren in eine das Wachstum beschreibende Form bringen kann. Dagegen billigt er (op.c., S. 224) dies im Fall der von HUGERSHOFF im Jahre 1936 angegebenen Funktionsform mit konstantem Exponenten $(m = 2)$, indem er die für diese gegebenen Begründungen als der energetischen Anschauungsweise entsprechend erachtet. Diese Begründungen, die im Nachstehenden näher betrachtet werden, gelten selbstverständlich ebenso gut, welchen positiven Wert der Exponent m auch haben mag.

KOLLERS Funktion kann als Beschreibung des Wachstumsvorgangs folgendermassen motiviert werden. Man kann davon ausgehen, dass *auf den Zuwachs* des Baumindividuums *zwei einander entgegengesetzte Kräfte einwirken*, seine zunehmende Tendenz als die eigentliche Wuchskraft sowie die »Hemmung», die sich aus inneren Faktoren des Baumindividuums ergibt und eine das Wachstum entkräftende Tendenz hat (vgl. PESCHEL 1938, S. 215). Die erstere wird in der Gleichung von der Potenzfunktion (t^m) vertreten, deren Wirkung von Anfang an stark fühlbar ist. Letztere ist in der Exponentialfunktion (e^{-kt}) enthalten, und es ist wiederum charakteristisch für sie, dass ihr Wert anfangs im Vergleich zur Potenzfunktion gering ist, aber mit wachsendem t rascher als diese zunimmt. So macht sich ihr Einfluss von der Maximalphase der Funktion an stärker geltend und führt die stetige Abnahme des jährlichen Zuwachses herbei.

Die *Parameter* der Funktion *sind* der *Masstabskoeffizient* q *sowie* die ihren *Rhythmus bestimmenden Exponenten* m und k. Die Funktion ist eine Kombination der Potenz- und Exponentialfunktionen, deren entgegengesetzte Wirkungen ihr eben den dem Wachstumsvorgang entsprechenden Verlauf geben. Als Funktion für den Zuwachs hat sie als Ausgangspunkt zum Zeitpunkt $t = 0$, $i = 0$, aber als ihrem zweiten Grenzwert nähert sie sich erneut dem Wert $i \to 0$ erst bei $t \to \infty$ statt dem Zeitpunkt T des Altertods. In dieser Beziehung entspricht die Funktion also nicht gänzlich dem tatsächlichen Verlauf des Wachstumsvorgangs. Es ist indessen äusserst selten nötig, Wachstumsbeträge zu benutzen, die nahe dem Wert T liegen; fernerhin liegt der Wert der Funktion in dieser Phase bereits so nahe dem Wert $i = 0$, dass dieser Gesichtspunkt der praktischen Bedeutung entbehrt.

Als Zuwachsfunktion kommt die KOLLERsche im Zeitabschnitt $0 \leqq t_i \leqq T$ in Frage, und sie setzt einen positiven Exponent (m) in ihrem Potenz- und einen negativen $(-kt)$ in ihrem Exponentialteil voraus, damit sie eine der Zuwachsfunktion entsprechende Form erhält. Falls der letztere einen positiven Wert hat, wächst die Funktion mit zunehmendem t stetig im Bereich $t > 0$. Wenn der Exponent m einen negativen Wert hat, besitzt die Funktion bei $t = 0$ den Ausgangswert $i = \infty$, von wo ihr Wert monoton abfällt.

Der Zeitpunkt des grössten Zuwachses ergibt sich bei der Funktion im Alter (vgl. PRODAN 1961, S. 349)

(65.1) $$t_M = \frac{m}{k}\,.$$

Ihre Wendepunkte wiederum ergeben sich an den Zeitpunkten

(65.2) $$t_{I\pm} = \frac{m \pm \sqrt{m}}{k}$$

und liegen somit symmetrisch zu beiden Seiten der Maximalphase. In dieser Hinsicht hat also die Funktion ihren zweiten »Schönheitsfehler», auf dessen praktische Bedeutung jedoch die gleichen Feststellungen zutreffen, die oben bereits bezüglich der Endphase des Wachstumsvorgangs gemacht wurden.

KOLLERS *Funktion erfüllt* die an die Wachstumsfunktion vom *rechnerischen* Standpunkt zu stellenden *Anforderungen recht gut*. Wenn nämlich in der Gleichung (64.1) zu beiden Seiten der Logarithmus genommen wird, ergibt sich folgende Funktionsform:

(65.3) $$\begin{aligned} \log i &= \log q + (-k)t + m(\log t)\,. \\ \hat{y} &= a + b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned}$$

Es steht in dieser Transformation also eine lineare Regressionsgleichung mit zwei unabhängigen Variablen $(\log t$ und $t)$ in Frage, mittels welcher das Schätzen einfach ausgeführt werden kann.

Wenn das *Schätzen des Wachstumsfunktionsalters* t_f (vgl. S. 36) in Frage steht, kann es im Falle der KOLLERschen Funktion am besten *mit Hilfe des Iterationsverfahrens* ausgeführt werden, z.B. indem man die TAYLORsche Reihe heranzieht (vgl. z.B. DEMING 1948, S. 191—192 oder WILLIAMS 1959, S. 59—61). Dann entspricht, wenn man für die Differenz zwischen dem Wert von t_f und dem beobachteten Alter t den Wert $t_f - t = \Delta t$ annimmt, der Gleichung (65.3) die Form

(65.4) $$\log i = \log q + (-k)(t + \Delta t) + m \log(t + \Delta t)\,.$$

Um dem Wachstumsvorgang eine richtige Form zu geben, hat die eigentliche KOLLERsche Funktion zur Voraussetzung, dass die *Phasenstellen* der Funktion beim Schätzen genügend *deutlich lokalisiert werden* (vgl. *Dem.B. 108, 123₁*). Falls jedoch das zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial dieser Voraussetzung nicht genügt, kann der Nachteil so vermieden werden, dass man das Schätzen der Funktion mit Aufstellung einer geeigneten zusätzlichen Bedingung ausführt, welche dazu führt, dass die zu schätzende *Funktion durch* einen gewissen, überlegungsmässig *festgelegten Punkt geht* und damit ihr die richtige Form erteilt. So erhält man eine Modifikation der Funktion (64.1), die man als die *bedingte* KOLLERsche *Funktion* bezeichnen kann:

(66.1) $$i = i_{T'} \left(\frac{t}{T'}\right)^m e^{-k(t-T')} ,$$

und zwar bedeutet dies, dass die Funktion zum Zeitpunkt T' den Wert (den Zuwachsbetrag) $i_{T'}$ aufweist. Die Parameter k und m wiederum können in normaler Weise geschätzt werden. Vom Standpunkt der aus dem Beobachtungsmaterial erhältlichen Information bedeutet ein solches Vorgehen selbstverständlich eine die *Effektivität* des Schätzens *verringernde Einschränkung*, aber falls man auf diesem Wege besser den dem tatsächlichen Wachstumsvorgang entsprechenden Verlauf sicherstellen kann, kann das Verfahren durchaus als motiviert gelten (vgl. *Dem.B. 89)*.

Man kann davon ausgehen, dass man beim Anwenden der KOLLERschen Funktion aus dem jeweils vorliegenden Beobachtungsmaterial die grösstmögliche Informationsmenge mittels ihrer eigentlichen Form (64.1) ohne weitere Bedingungen gewinnt. Das Verhältnis der Menge der von einer bedingten Funktionsform erklärten Variation zu dieser »Grösstmenge» vertritt ihresteils eine Art von **Informationsverhältnis.** Dieses gibt somit ein Bild davon, welches Mass an Information man bei Anwendung der Zusatzbedingung einbüsst. Auf dieser Grundlage wiederum kann man verschiedene Alternativen miteinander vergleichen und man kann voraussetzen, dass unter diesen diejenige, die das günstigste Informationsverhältnis hat, auch am besten die an die Schätzung zu stellenden Anforderungen erfüllt.

Der Schätzform (65.3) der eigentlichen KOLLERschen Funktion entsprechend hat die Funktion (66.1) die rechnerische Form

(66.2) $$\hat{y} - \log i_{T'} = b_1(x_1 - T') + b_2(x_2 - \log T') .$$

Das konstante Glied der Gleichung wird also in diesem Fall getrennt auf Grund der Schätzungen der Parameter b_1 und b_2 bestimmt.

BACKMAN (1943) hat eine Funktion des Wachstums

(66.3) $$\log i' = -k_2(\log t')^2$$

vorgelegt, die auf der Hypothese fusst, dass der Logarithmus der Wachstumsgeschwindigkeit dem Quadrat des Logarithmus der Zeit negativ proportional ist, wenn beide in ihrem Verhältnis mit dem Zuwachsbetrag in der Maximalphase der Wachstumsgeschwindigkeit (mit der »Normalwachstumsgeschwindigkeit») und mit dessen Zeitpunkt (mit der vom Ausgang des Wachstumsvorgangs gerechneten »Normalzeit») gemessen werden (op.c., S. 6). Den Logarithmus dieser seiner Normalzeit nennt BACKMAN (op.c., S. 41) die *»organische Zeit»*. Wenn in der Funktion (66.3) für den Zuwachsbetrag und für das Alter die Werte $i' = \frac{i}{i_M}$ und $t' = \frac{t}{t_M}$ eingesetzt werden, erhält man die Zuwachsfunktionsform (op.c., S. 7):

(66.4) $$\log i = k_0 + k_1(\log t) + (-k_2)(\log t)^2 .$$

Die gleiche Funktion hat auch KORŠUN im Jahre 1934 angegeben (PESCHEL 1938, S. 204—206), die weiter in folgende Form[1] gebracht werden kann:

(66.5) $$i = q\, t^m e^{-k(\log t)^2}$$ (BACKMANS Funktion)

[1]) Die Bezeichnungen in der Funktion sind der in dieser Arbeit allgemein befolgten Praxis entsprechend umgetauscht worden.

KORŠUN gab allerdings seine Funktion als Funktionsform des Wachstums an, aber sie entspricht in ihrem Wesen vielleicht besser der Funktion des Zuwachses mit allen für diese typischen Eigenschaften.

Die Maximalphase der Funktion ergibt sich (BACKMAN 1943, S. 8) mit den Symbolen der Gleichung (66.5) zum Zeitpunkt

(67.1) $$\log t_M = \frac{m}{2k} \quad \text{oder} \quad t_M = e^{\frac{m}{2k}}$$

und ihre Wendepunkte (op.c., S. 9) zu den Zeitpunkten

(67.2) $$t_{I\pm} = e^{\log t_{I\pm}} \quad \text{mit} \quad \log t_{I\pm} = \frac{1 - 2m \pm \sqrt{1 - 8k}}{4k} .$$

In ihren Eigenschaften, die THOMASIUS (1965b) ausführlich analysiert und kritisiert hat, ist BACKMANS Funktion in der Form (66.5) der KOLLERschen (64.1) ähnlich, indem nur Verschiedenheit bezüglich des Exponentialteils besteht. Hieraus folgt, dass in bezug auf dieselbe die gleichen Gesichtspunkte angängig sind, die zuvor hinsichtlich der KOLLERschen Funktion dargestellt wurden *(Dem.B. 91₂)*. Nur bezüglich der Lage des späteren Wendepunkts entspricht BACKMANS Funktion theoretisch besser dem Verlauf des Wachstumsvorgangs, indem dieser von der Maximalphase weiter abliegt als der erstere.

Ihrer *rechnerischen Form nach entspricht* BACKMANS Funktion ebenfalls *der* KOLLERschen, indem man für sie auf Grund der Form (66.5) die Regressionsgleichung mit zwei unabhängigen Variablen erhält,

(67.3) $$\log i = \log q + m(\log t) + (-k)(\log t)^2 ,$$
$$\hat{y} = a + b_2x_2 + b_3x_3$$

die somit völlig zur Regressionsgleichung (65.3) parallel ist.

422. Funktionen des Wachstums

Funktionen des Wachstums sind zu verschiedenen Zeiten in noch grösserer Zahl als Funktionen des Zuwachses angegeben worden. Als Beispiel solcher, die von der entsprechenden Funktionsform des letzteren abgeleitet sind, kann hier besonders die auf BACKMANS Funktion beruhende Form für das Wachstum erwähnt werden (BACKMAN 1943, S. 17), die der kumulativen Funktion der Normalverteilung ähnelt. Diese Übereinstimmung ist auch in zahlreichen Untersuchungen, wie von WECK (z.B. 1953 und 1955) und von JOHNSSON (1953, S. 86—89), als Ausgangspunkt der Wachstumsanalyse und von Prognoserechnungen ausgenutzt worden.

Unter den zur Beschreibung des Wachstums benutzten Funktionsformen vielleicht die bekannteste ist (vgl. PRODAN 1961, S. 355—362) das sog. »Wirkungsgesetz der Wachstumsfaktoren»:

(67.4) $$v_i = v_T(1 - e^{-kt_i})^n$$ (MITSCHERLICHS Funktion),

die sich jedoch eher zur Darstellung der Ertragskurve (vgl. THOMASIUS 1964, S. 720) eignet. Sie befolgt das in der Volkswirtschaft und Landwirtschaft schon früher angewandte Prinzip, dass bei Annäherung einer gewissen Grenze des Wachstums (v_T) sich dessen Geschwindigkeit dem Wert Null zu nähern strebt. Dieser Funktionsform ist viel Anerkennung, aber andererseits auch beträchtlich viel Kritik zuteil geworden (vgl. näher PESCHEL 1938, S. 229—236). MITSCHERLICHS Funktion befolgt indessen nicht die zuvor (S. 61) für das Wachstum als charakteristisch festgestellte S-Gestalt, sondern sie setzt stetige Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit proportional zur Differenz der maximalen und der erreichten Masse voraus. Aus diesem Grunde *kann sie* im Hinblick *auf unsere Verhältnisse nicht* mit Erfolg *angewandt werden.*

Bei der MITSCHERLICHschen, ebensowie bei den meisten für das Wachstum vorgelegten Funktionsformen besteht die *Schwierigkeit* darin, *dass sie den Maximalbetrag* v_T des Wachstums *als bekannte,* in der Funktion enthaltene Konstante *voraussetzt,* was jedoch in Wirklichkeit kaum jemals denkbar ist. Rechenverfahren, mittels welcher er als Parameter geschätzt werden könnte, sind u.a. gerade für MITSCHERLICHS Funktion angegeben worden (vgl. z.B. NIKLAS—MILLER 1926, S. 700—701, PRODAN 1961, S. 359—362, SCHNEIDER 1963, S. 79—92).

Zusätzlich zu den obigen ist es angebracht, die Funktionsform

(68.1) $$v = q\,e^{-bt^{-c}}$$ (MICHAJLOWS Funktion)

zu erwähnen, und zwar in erster Linie deshalb, weil sie der in Verbindung mit dem Funktionstyp des Wachstumskoeffizienten vorkommenden *Wachstumsfunktion (72.2) nahe verwandt* ist. Die Funktion, ebensowie auch die ihr entsprechende Funktion des Zuwachses, hat MICHAJLOW (1952, S. 371—378) hergeleitet, und er hat auch nachgewiesen, dass sie alle an die Wachstumsfunktion zu stellenden formalen Anforderungen erfüllt.

In diesem Zusammenhang wird noch die folgende Funktionsform des Wachstums betrachtet:

(68.2) $$v = \frac{v_T}{\left(1 + \frac{b}{t}\right)^c}$$ (LEVACOVICS Funktion) ,

die mit den gleichen thereoretischen Grundlagen wie auch KOLLERS Funktion hergeleitet werden kann (vgl. PESCHEL 1938, S. 198—202).

In ihrer eigentlichen Form ist sie jedoch rechnerisch umständlich, aber sie kann in besser anwendbare Form gebracht werden, wenn man den Ausdruck in ihrem Nenner zu einer Binomialreihe entwickelt (s. op.c., S. 201), wobei sich der Kehrwert der Funktion in ein Polynom umformen lässt:

(68.3) $$\frac{t^m}{v} = at^m + bt^{m-1} + \ldots + p + \ldots .$$
$$\hat{y} = b_m x_m + b_{m-1} x_{m-1} + \ldots + a + \ldots$$

Die Reihe kann *als Approximation,* je nach der gewünschten Genauigkeit, mit beliebigem Wert von m ausgehend an beliebiger Stelle abgebrochen werden. Die Anwendbarkeit des Verfahrens wird im Demonstrationsmaterial besprochen *(Dem.B. 95_1).*

Die Bestimmung der Parameter der Wachstumsfunktion kann man sich auch auf Umwegen derart ausgeführt denken (vgl. S. 54), dass auf Grund der Gleichung (50.2) zuerst die entsprechende Funktionsform des Zuwachsprozents hergeleitet wird, deren Parameter danach an Hand des Beobachtungsmaterials geschätzt werden und dann als Konstanten der Funktionsform des Wachstums angewandt werden; ihre übrigen Parameter können zum Schluss auf Grund ihrer eigenen Funktionsform geschätzt werden.

Beim Anwenden der Gleichung (50.2) beispielsweise auf MICHAJLOWS Funktion (68.1) erhält man als dieser entsprechende *Zuwachsprozentfunktion*

(69.1) $$p = \frac{\Delta(\log v)}{dt} = \frac{bc}{t^{c+1}} .$$

und weiter die Schätzfunktion

(69.2) $$\log p = \log(bc) - (c+1)(\log t).$$

Es ist zu beachten, dass hier der Prozentsatz des kontinuierlichen Zinseszinses in Frage steht, für den man die Beobachtungswerte aus dem Material unter Anwendung eines geeigneten approximativen Verfahrens bestimmen soll.

Wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, ist die *Anwendung der* zur Beschreibung des Wachstums *publizierten Funktionsformen* in der Praxis *schwierig.* In der Hauptsache beruht dies auf deren rechnerischer Unanwendbarkeit. Im Zusammenhang mit der Wachstumskoeffizientenfunktion wird man noch auf einen möglichen Ausweg zum Beschreiben des Wachstums zurückkommen.

423. Eine den Wachstumskoeffizient darstellende Funktionsform

Wie schon vorn (S. 63) hervorging, ist es vom rechnerischen Standpunkt am zweckmässigsten, die Funktion für den Wachstumskoeffizienten in logarithmischer Form anzuwenden. Dies kann man beim Ausarbeiten ihn beschreibender Funktionsformen zum Ausgangspunkt nehmen. Dabei gewinnt man fernerhin den Vorteil, dass, selbst wenn die logarithmische Form der Funktion innerhalb der Grenzwerte $+\infty \geqq \log k \geqq -\infty$ $(0 \leqq t \leqq \infty$ entsprechend) gleichseitige Gestalt hätte, die *Wachstumskoeffizientenfunktion selbst eine Form wie eine rechts schiefe Hyperbel haben wird,* was in der Tat eben ihrem wirklichen Verlauf entspricht.

Bei der Suche nach einer geeigneten Funktionsform kann man von einer möglichst einfachen Hyperbelform

(69.3) $$xy = ax + b \qquad \text{oder} \qquad y = a + \frac{b}{x}$$

ausgehen, die wohl die an den Wachstumskoeffizienten zu stellenden formalen Anforderungen erfüllt, da sie die Geraden $x = 0$ und $y = a$ als Asymptoten hat. Die Hyperbelfunktion in dieser Form berücksichtigt jedoch nicht die Variation in der Steilheit der Form der Wachstumskoeffizientenfunktion.

Man kann die in Frage stehende Variation recht einfach regulieren, indem man der Variablen x *einen geeigneten Exponent c hinzufügt,* dessen Wirkung jeweils möglichst gut mit dem Verlauf des Wachstumskoeffizienten übereinstimmt. Dieser Exponent kann in der Funktion alternativ *entweder als* vorbestimmte *Konstante* auftreten, *oder* er wird *als Parameter* in jedem Fall an Hand des Beobachtungsmaterials geschätzt. So erhält man für die Wachstumskoeffizientenfunktion die Form

(69.4) $$k = q\,e^{bt^{-c}} .$$

Die rechnerische Form der Funktion (136.1) findet man durch Einsetzen ihrer logarithmischen Form

(69.5) $$\log k = \log q + b\,t^{-c} .$$

in Gleichung (63.3), womit sich das eigentliche Schätzen für die eine Messungsperiode von $l-j = n$ Jahren der Zeitperiode $t_{j\to l}$ betreffenden Messungsergebnisse ergibt:

(70.1) $$\Delta(\log v)_{j\to l} = (l-j)(\log q) + b\sum_{i=j}^{l-1} t_i^{-c},$$

$$\hat{y}_{j\to l} = n\,a + b\sum_{i=j}^{l-1} x_i$$

die auch in die dem geometrischen Mittel der Messungsperiode entsprechende Form umgewandelt werden kann:

(70.2) $$\frac{1}{n}\Delta(\log v)_{j\to l} = \log q + \frac{1}{n} b\sum_{i=j}^{l-1} t_i^{-c}.$$

Diese Form kann man anwenden, wenn man im gleichen Rechenprozess auf *Messperioden verschiedener Länge* basierende Beobachtungen *vereinigen will.* Auf Zuordnung zum geometrischen Mittel des Jahreswachstumskoeffizienten umgerechnet können diese bei der Berechnung einander gleichgestellt werden.

Als Schwäche der Wachstumskoeffizientenfunktion kann der Umstand angesehen werden, dass man das Schätzen der Regressionsgleichung in der logarithmischen Transformation ausführen muss, da dies angesichts der allgemeinen Messgenauigkeit im Beobachtungsmaterial *den Werten jüngerer Phasen unverhältnismässig grosse Bedeutung* zumisst. So werden die Ausgleichsabweichungen am allergrössten eben in demjenigen Teil der Funktion, wo ihre Veränderungsgeschwindigkeit am grössten ist und ihr Verlauf daher am empfindlichsten durch Beobachtungsfehler beeinflusst wird. Da wiederum in den Messungen eben diesen Beobachtungen relativ die geringste Genauigkeit zufällt, wirkt sich die mit ihnen verknüpfte Streuung wenigstens bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate entscheidend auf das Schätzergebnis aus. Im gegenüberliegenden Teil der Ausgleichskurve wiederum führt dies leicht zu Systematizität der Abweichungen, obwohl dort die Beobachtungen selbst infolge der hohen Werte ihres Divisors, des Wachstums (v) viel zuverlässiger sind. Die oben beschriebene Tendenz äussert sich am stärksten, wenn man den Exponenten c beim Schätzen als Konstante in Anwendung bringt. Sie tritt auch gerade in denjenigen Fällen besonders deutlich hervor, in denen die Werte des Wachstums im Beobachtungsmaterial quantitativ stark voneinander abweichen, wie beispielsweise in den sich auf das einzelne Baumindividuum gründenden Messreihen.

Zwecks Ausschaltung dieser nachteiligen Wirkungen kann man, wann ein solches Vorgehen mit Rücksicht auf das Ergebnis seinem Zweck entspricht, die *Beobachtungen* beim Schätzen in solcher Weise *gewichten*, die ihre Zuverlässigkeit in Rücksicht zieht. Als eine geeignete Grundlage dafür kann man den Nenner in der Wachstumskoeffizientengleichung (50.3) anwenden, da ein gleichgrosser absoluter *Fehler* in der Beobachtung im Wert des Wachstumskoeffizienten *der Grösse des Nenners umgekehrt proportional ist.* Vom Standpunkt der praktischen Aufgaben hat dieses Gewichtungsvorgehen einen zweiten beachtenswerten Vorteil: Beim Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion direkt aus den Messungen an Probebäumen gelangt man bei Benutzung einer diesartigen Gewichtung unmittelbar zu einer offensichtlich anwendbaren Approximation der Wachstumskoeffizientenfunktion, da hierbei die Ausgleichsabweichungen in Hinsicht auf ihre Bedeutung in korrekterem Verhältnis zur Auswirkung kommen, als wenn man es in einem solchen Fall ungewichtet ausführen würde (vgl. S. 53).

Ob das Schätzen mit oder ohne Gewichtung vorgenommen wird, hängt sowohl von der Natur des Materials als auch von dem Ziel ab, welches der

Berechnung im jeweiligen Fall gesetzt ist. Es ist z.B. offenbar, dass es *beim Schätzen des Exponenten* angebracht ist, *ungewichtete Beobachtungen zu verwenden*, da dann derjenige Teil der Beobachtungsreihe besondere Bedeutung erlangt, in dem sich der Wert des Wachstumskoeffizienten besonders abrupt ändert. Einige hierauf einwirkende Gesichtspunkte werden noch bei der Betrachtung des Demonstrationsmaterials *(Dem.B. 95$_2$)* erörtert.

Wird der Gewichtungsfaktor (v) mit dem üblichen Symbol w bezeichnet, so erhält die Gleichung (70.1) die Form

(71.1) $$w_j y_{j\to l} = w_j\,(l-j)\,a + b\,w_j\sum_{i=j}^{l-1} x_i\,.$$

Zum Zeitpunkt T des *Altertods* des Baums erreicht der Wachstumskoeffizient den Grenzwert $= 1$, und sein Logarithmus erhält den Wert $= 0$. Somit ergibt sich für die Gleichung (69.5) die Form

(71.2) $$\log q + b\,T^{-c} = 0\,.$$

Hieraus folgt weiter

(71.3) $$T^{c} = \frac{b}{-(\log q)}\,.$$

Wird dies ferner in logarithmische Form gebracht

(71.4) $$\log T = \frac{1}{c}\log\left(\frac{b}{-(\log q)}\right),$$

kann auf Grund von ihr der Wert von T bestimmt werden.

In gewissen Fällen, insbesondere in praktischen Aufgaben, kann es zweckmässig sein, *erwägungsgemäss der Zeitpunkt T festzulegen.* So wird der Verlauf der Funktion ausser an ihrem Ausgang auch an ihrem Ende gebunden. Dabei können unabhängig von einem eventuell einseitigen Material Berechnungen auch ausserhalb des Beobachtungsmaterials der Wirklichkeit besser entsprechend gemacht werden (vgl. *Dem.B. 110)*.

Wird der Zeitpunkt T im Voraus festgelegt, so wird die Grösse $T^{-c} = r$ zur Konstante, die man in Gleichung (71.2) einsetzen und so für den Parameter den Wert $\log q = -br$ erhalten kann. Wird dieser in der Gleichung der logarithmischen Form (69.5) eingesetzt, dann wird die folgende Bedingung der Wachstumskoeffizientenfunktion auferlegt:

(71.5) $$\log k = b\,(t^{-c} - r)$$

oder betreffs einer Messungsperiode $t_{j\to l}$:

(71.6) $$\sum_{i=j}^{l-1}(\log k_i) = b\left[\sum_{i=j}^{l-1} t_i^{-c} - (l-j)\,r\right].$$

$$\hat{y}_{j\to l} = b\left[\sum_{i=j}^{l-1} x_i - (l-j)\,r\right]$$

Hieraus kann man weiter für das Material mit n Beobachtungen mittels des Verfahrens der kleinsten Quadrate für b die Schätzgleichung der *bedingten Wachstumskoeffizientenfunktion* herleiten:

(71.7) $$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{n} y_{j\to l}\left(\sum\limits_{i=j}^{l-1} x_i - (l-j)\,r\right)}{\sum\left(\sum\limits_{i=j}^{l-1} x_i - (l-j)\,r\right)^2}$$

Bei diesem Vorgehen geht allerdings der Betrag der von der Regression erklärten Variation etwas herab, d.h. man büsst im Beobachtungsmaterial enthaltene

Information ein, aber diesem steht die Sicherheit der Anwendbarkeit der Resultate auch in Extrapolationsfällen gegenüber. Das *Informationsverhältnis* kann dann in gleicher Weise wie auch im Zusammenhang mit der bedingten KOLLERschen Funktion (66.1) bestimmt werden (vgl. S. 66),

Die auf der Wachstumskoeffizientenfunktion besierende Beschreibung des Wachstumsvorgangs kann bei Bedarf in Beträge des Wachstums und über diese in Beträge des Zuwachses umgerechnet werden. Um formal richtig zu sein, muss das Binden der Funktion an die Werte des Wachstums im Schwerpunkt der Regressionsgerade stattfinden. Als Approximation kann man jedoch im allgemeinen einfacher statt dessen die Wachstumskoeffizientenfunktion dann an irgendeinen anderen geeigneten Fixpunkt binden. Beim Beschreiben des Wachstums eines Baumindividuums kann dies am besten *an die Masse* v_m *zum Zeitpunkt der Messung* erfolgen, von welchem ausgehend man gewissermassen mit Hilfe der Wachstumskoeffizientenfunktion auf die Massen in den verschiedenen Altersphasen des Baumindividuums zurückgeht. Diese *Rekursionsformel* erhält die Form

$$v_i = \frac{v_m}{\prod_{i}^{m-1} q e^{b t_i^{-c}}} . \tag{72.1}$$

Das Rechnen bei Anwendung dieser Formel geht am zweckmässigsten logarithmisch vor sich. Mit ihrer Hilfe kann man die v_i-Werte bei den betreffenden Zeitpunkten bestimmen; als deren Differenz wiederum erhält man die Beträge der entsprechenden Zuwächse. Da man die Anwendung der Formel (72.1) ohne Gewichte ausführen muss, führt die Rechnung nicht ganz zu dem mit der betreffenden Messung übereinstimmenden Endwert. Diese Anhäufung von Differenzen ist als Schwäche zu bewerten. Insbesondere wird sie am stärksten in den Endwerten der Berechnungskette fühlbar, im Falle eines Baumindividuums also in seinen allerjüngsten Altersphasen, bei denen diejenigen Abweichungen entstehen, auf welche das Zutreffen des zur Anwendung kommenden Exponenten c besonders einwirkt.

Zu der soeben beschriebenen Vorgangsweise entgegengesetzt ist die auf Grund der Gleichungsform (52.1) des Wachstumskoeffizienten hergeleitete entsprechende *Funktionsform des Wachstums* (vgl. *Dem.B.* 95_2) die am zweckmässigsten in logarithmischer Form dargestellt wird:

$$\log v_t = \log v_1 + (\log q)(t-1) + b \sum_{i=1}^{t-1} t_i^{-c} . \tag{72.2}$$

$$\hat{y} \;=\; a_0 \;+\; a_1 x_1 \;+\; b x_2$$

Ebenso wie bei der Wachstumskoeffizientenfunktion kommt auch bei dieser Wachstumsfunktion in entsprechenden Fällen (vgl. S. 70—71) Berücksichtigen einer Gewichtung in Erwägung, um ein zweckmässiges Schätzergebnis zu erzielen.

Die Gleichungsform (70.1) ist eine lineare Regressionsgleichung mit einer unabhängigen Variablen, wenn der Exponent c als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die Werte des Faktors $x = t^{-c}$ können in geeigneter Weise *für verschiedene Werte von c tabelliert* werden, so dass der Wert der unabhängigen Variablen x_i in Gleichung (70.1) leicht für die Rechnungen erhältlich ist. Das Schätzen wird sich dann eigentlich nur auf die Parameter $a = \log q$ und b beziehen. Ein solches Schätzen kann man für eine Reihe verschiedener Werte von c ausführen, und

durch solches *Probieren* kann man diejenige Schätzung von c aufsuchen, die die geringste Reststreuung ergibt.

Auch ist es möglich, den Wert von c bei Bedarf durch *Anwendung eines* geeigneten *Iterationsverfahrens* zu schätzen. Einen Ausgangspunkt hierzu bietet beispielsweise die Heranziehung der TAYLORschen Reihe (vgl. S. 65). Der Rechenvorgang wird hierbei jedoch recht kompliziert und nur mit der Datenmaschine zu bewältigen sein, was auch dann zweckmässig ist, wenn man die Schätzung von c auf die oben besprochene Weise durch Ausprobieren ausführt.

Mit hinreichender Grundforschung lassen sich zweifellos für den Exponenten c genügend zuverlässige empirische Anwendungswerte erzielen, die für verschiedene Altersperioden tabelliert werden können. Der Einfluss des Exponenten c macht sich in der Wachstumskoeffizientenfunktion umso stärker geltend, je jüngere Lebensphasen in Frage stehen. Dagegen wirken Unterschiede in seinem Wert im grössten Teil der Lebensdauer des Baums (bzw. des Bestands) verhältnismässig wenig auf die Ergebnisse ein, was zu einfacherer Anwendung der Näherungswerte für c beiträgt. Es ist somit am wichtigsten, solche Werte von c zu finden, die in den Ausgangsphasen der Bäume die Entwicklung möglichst gut wiedergeben. Solche Werte können dann auch in grösserer Allgemeinheit Verwendung finden. Doch sollten dabei die Abweichungen in dem jüngsten Alter in Einzelfällen grösser sein, aber im allgemeinen besitzen die daraus erwachsenden Unterschiede in Berechnungen bei der geringen Masse keine entscheidende Bedeutung.

Im Vorstehenden ist der Wachstumsfunktionstyp nur auf Grund einer einzigen Funktionsform betrachtet worden. Es ist natürlich, dass genau wie bei den übrigen Wachstumsfunktionstypen auch für den Wachstumskoeffizienten andere Funktionsformen ausgearbeitet werden können. Es ist auch ohne weiteres klar, dass man versuchen müsste, möglichst zweckmässige Funktionsformen zu konstruieren. An Hand der jetzt besprochenen Funktionsform hat man jedoch diejenigen fundamentalen Gesichtspunkte hervorbringen können, die einem bei Zuwachsberechnungen auf Grund des Wachstumskoeffizienten begegnen, und man hat damit diesen Teil der Problematik der Wachstumsanalyse beleuchten können *(Dem.B.* 95_2*, 110,* 127_1*)*.

5. GESICHTSPUNKTE ZUM ANALYSIEREN DER WIRKUNG DER ÜBRIGEN WACHSTUMSFAKTOREN

51. REGRESSIONSANALYSE DER MESSBAREN WACHSTUMSFAKTOREN

511. Unmittelbares Anschliessen der zusätzlichen Veränderlichen an das Regressionsmodell

Falls man danach strebt, die Wirkung einer zusätzlichen Veränderlichen gleichzeitig mit derjenigen der Hauptveränderlichen in Rücksicht zu ziehen, gelangt man zu einer üblichen *mehrfachen Regressionsfunktion*, die unter Benutzung der auf solche angewandten normalen Verfahren geschätzt und geprüft werden kann (vgl. z.B. WILLIAMS 1959, S. 23—40, SNEDECOR 1957, S. 413—420, DRAPER—SMITH 1966, S. 234—242). Die Zahl der unabhängigen Variablen wird dem zuvor Dargestellten (S. 55—56) gemäss letzten Endes von der Form abhängig sein, in welcher die zusätzliche Veränderliche der Regressionsbeziehung angegliedert werden kann. Zumindest bedeutet es selbstverständlich das Hinzukommen einer neuen unabhängigen Variablen für jede zusätzliche Veränderliche. Es besteht kein grundsätzlicher Unterschied hinsichtlich dessen, ob gleichzeitig eine *(Dem.B. 113)* oder mehrere *(Dem.B. 126)* zusätzliche Veränderlichen angeschlossen werden; dagegen aber kommt diesem Umstand vom rechnerischen Standpunkt recht grosse Bedeutung zu.

Prüfung der Signifikanz der zusätzlichen Veränderlichen kann beispielsweise in der von LINDER (1960, S. 191—193) dargestellten Weise erfolgen (vgl. auch SNEDECOR 1957, S. 417—420, 437) *(Dem.B. 113)*. Das Verfahren gründet sich auf eine Analyse, in welcher die *Signifikanz* der von zusätzlichen Veränderlichen *zuschüssig erklärten Streuung* an Hand der als Zufallsstreuung verbleibenden Reststreuung geprüft wird. Das Prinzip dieser Testweise kommt in der Form des nachstehenden Schemas zum Ausdruck; darin bedeuten p_x und p_z die Anzahl der mit der Hauptveränderlichen bzw. der zusätzlichen Veränderlichen verknüpften unabhängigen Variablen.

Art der Streuung	Freiheitsgrade	Varianz	Wert im F-test
Gesamtstreuung (T)	$n-1$		
Von der Hauptveränderlichen allein erklärte Streuung (X)	p_x		
Von der Hauptveränderlichen zusammen mit der zusätzlichen Veränderlichen erklärte Streuung $(X+Z)$	p_x+p_z		
Von der zusätzlichen Veränderlichen gelieferter Zuschuss zum Betrag der erklärten Streuung $=(X+Z)-X$	p_z	s_z^2	$s_z^2 : s_0^2$
Zufallsstreuung $= T-(X+Z)$	$n-p_x-p_z-1$	s_0^2	

Falls gleichzeitig mehrere zusätzliche Veränderliche in der Analyse beteiligt sind, kann man unter Anwendung des obigen Schemas gleichfalls *sowohl* die *gemeinsame* Signifikanz der zusätzlichen Veränderlichen *als* auch *gesondert* für sich die Signifikanz einer jeden zusätzlichen Veränderlichen bei Berücksichtigung der Wirkung der übrigen prüfen *(Dem.B. 119)*.

512. Erklärung der Reststreuung durch zusätzliche Veränderliche

Der Wachstumsvorgang der Bäume ist ein typisches Beispiel einer Abhängigkeitsbeziehung, in welcher ein Faktor ausschlaggebend die Art der Regressionsbeziehung bestimmt. Demzufolge ist es gewöhnlich, dass man im Zusammenhang damit zusätzliche Veränderliche in Anwendung bringen muss, die selbst in einer Abhängigkeitsbeziehung zur Hauptveränderlichen stehen. Hierbei erlangt dann ihre Wirkungsbeziehung leicht mehr scheinbare Bedeutsamkeit als sie in Wirklichkeit besitzt. Dies kann zur Verwirrung in der Deutung der Wirkung der verschiedenen Wachstumsfaktoren beitragen, insbesondere, falls das Beobachtungsmaterial inhomogen ist oder eine hinsichtlich des Wachstumsvorgangs einseitige Verteilung aufweist. Es besteht die Möglichkeit, dass man beim Anwenden der mehrfachen Regressionsanalyse in üblicher Weise zu einem Ergebnis gelangen kann, bei dem die Wirkungsbeziehungen mittels des benutzten Regressionsmodells gar nicht in richtiger Weise zum Vorschein kommen. In einem solchen Fall kann Ausführen der Wachstumsanalyse *in mehreren Phasen* besser zum Ziel führen (vgl. DRAPER—SMITH 1966, S. 173—177).

Die *erste Phase* einer solchen Wachstumsanalyse ist stets Ermittlung der *Wirkung der Hauptveränderlichen*, des Alters. Erst auf die in dieser Verbindung unerklärt gebliebene Streuung bezieht man in einer oder mehrerern Phasen die Analyse der Wirkung der zusätzlichen Veränderlichen. Falls es dabei möglich ist, die Bedeutung der verschiedenen zusätzlichen Veränderlichen vom Standpunkt des Wachstumsvorgangs zu bewerten, kann es zweckmässig sein, die Residuale *zuerst* in Beziehung zu derjenigen *zusätzlichen Veränderlichen* zu bringen, *deren Bedeutung am grössten* ist. Besonders hinsichtlich der Hauptveränderlichen, obgleich dies im Prinzip auch in Bezug auf die zusätzlichen Veränderlichen gilt, ist die Ermittlung ihrer Wirkung immer auf eine solche Weise vorzunehmen, die mit Sicherheit einen *Grundverlauf* der Wachstumsfunktion *von richtiger Form* garantiert.

Wenn also die zu erklärende Variable y zuerst in Abhängigkeit zur Hauptveränderlichen gesetzt wird, erhält man die Gleichung

$$y = a_x + b_x f(x) + \Delta y_x\,, \tag{75.1}$$

worin Δy_x das *Residual* der Regressionsgleichung (s. S. 78) vertritt. Dieses kann seinerseits weiter in eine Regressionsbeziehung zur gewünschten zusätzlichen Veränderlichen z_1 gebracht werden, wobei sich folgende Gleichung ergibt:

$$\Delta y_x = a_{z_1} + b_{z_1} g(z_1) + \Delta y_{z_1}\,. \tag{75.2}$$

Wenn man das Schätzen in weiteren Phasen fortführt, wird das neue Residual Δy_{z_1} wiederum in Abhängigkeitbeziehung zur zweiten zusätzlichen Veränderlichen z_2 gebracht usf.

Dem zuvor Dargestellten gemäss kann sich die Regressionsbeziehung bei der zusätzlichen Veränderlichen entweder nach Gleichung (55.2) auf die zusätzliche Veränderliche selbst oder auch nach den Gleichungen (56.1) und (56.2) auf den Unterschied zwischen dieser und dem Standardniveau gründen (vgl. *Dem.B. 114₁*). Im ersteren Fall erhält man durch Vereinigen der Gleichungen (75.1) und (75.2) als eigentliche Regressionsgleichung

$$y = (a_x + a_{z_1}) + b_x f(x) + b_{z_1} g(z_1) + \Delta y_{z_1}\,. \tag{75.3}$$

Wird wiederum als Standardniveau der zusätzlichen Veränderlichen z_1 eine Funktion der Hauptveränderlichen $z_1 = h(x)$ angenommen, so ergibt sich der Gleichung (56.2) entsprechend als Regressionsgleichung

$$y = (a_x + a_{z_1}) + (b_x f(x) - b_{z_1} h(x)) + b_{z_1} z_1 + \Delta y_{z_1}\,, \tag{75.4}$$

wobei diese Gleichung in ihrer Konstruktion ebenso einfach wie die vorige, aber *an Effektivität* ihr im allgemeinen deutlich *überlegen* ist (vgl. S. 56 und *Dem.B. 120*).

Das oben dargestellte Verfahren bleibt gleich, auch wenn man in die Analyse zur Erklärung der Reststreuung nach der Hauptveränderlichen gleichzeitig mehrere zusätzliche Veränderliche einbezieht. Desgleichen kann man unter Befolgung der obigen Grundsätze die Regressionsanalyse in weiteren Phasen fortführen. Die gleichzeitige Einführung mehrerer zusätzlicher Veränderlichen in einer gegebenen Phase der Analyse kann wiederum ebensogut vom Einbeziehen der Wirkung mehrerer Wachstumsfaktoren als auch von der Struktur des Regressionsmodells der Wirkung eines einzigen Wachstumsfaktors bewirkt werden.

Insofern die oben beschriebene Analyse in ihrer Gesamtheit im Rahmen ein und desselben Beobachtungsmaterials erfolgt, wird diese phasenweise Anwendung des Verfahrens der kleinsten Quadrate als grundsätzliche Lösung den an das Schätzen der Regressionsgleichungen zu stellenden Anforderungen (vgl. TÖRNQUIST 1958) in der einer gleichzeitigen Regressionsbeziehung mit mehreren Veränderlichen entsprechenden Weise gerecht.

Ist es nicht möglich, unmittelbar auf Grund des gesamten Beobachtungsmaterials zum richtigen Verlauf der Wachstumsfunktion zu gelangen, dann ist es sicherer, insbesondere bei der das Alter betreffenden Grundphase, als Ausgangspunkt irgendeine andere, dem Beobachtungsmaterial möglichst gut entsprechende Wachstumsfunktion zu wählen, die zuverlässiger die Analyse zum richtigen Ergebnis führt. Besonders ist es dabei im Hinblick auf das Ziel zweckmässig, als Ausgangspunkt einer gewissen Phase des Schätzens nur einen bestimmten, zu diesem Zweck besonders geeigneten *einheitlichen Teil des Materials* zu nehmen *(Dem.B. 114_1)*. Auch kann es in Betracht kommen, sogar eine gänzlich *auf Grund eines ausseitigen Beobachtungsmaterials* bestimmte Regressionsgleichung zu benutzen *(Dem.B. 123_2, 124_1)*. In solchen Fällen kann man selbstverständlich nicht immer voraussetzen, dass die Verteilung der Residuale unbedingt eine normale wäre, was jedoch vom Standpunkt der Analyse als Ausgangspunkt gelten müsste. Es ist indessen wahrscheinlich, dass sich auch dann ihre Verteilung annähernd dermassen normal gestaltet, dass auf Grund dessen auch die erforderlichen Teste ausgeführt werden können. Im Bedarfsfall kann diese Normalität der Verteilung auch in geeigneter Weise (s. z.B. STEEL—TORREY, 1960, S. 349—350) nachgeprüft werden. Bei der Interpretation des Analyseergebnisses ist es gewiss angebracht, die oben angeführten Gesichtspunkte stets dann als Reservation zu berücksichtigen, wenn nicht in allen Phasen der Analyse ein einheitliches Beobachtungsmaterial benutzt wird.

Da bei dem phasenweisen Regressionsschätzen Differenzen der Form $(y-\hat{y})$, $(z-\hat{z})$ usf. behandelt werden, können sämtliche darin vorkommenden Rechenoperationen direkt auf die Summen, Quadratsummen und Produktsummen der beobachteten Werte $x, y, z, \ldots$ zurückgeführt und *an Hand derselben* alle benötigten *Rechenwerte bestimmt werden.* Die Frage, wann ein solches Vorgehen zweckmässig ist, hängt einerseits von dem vom Verfahren hervorgerufenen Arbeitsaufwand und andererseits von der Art der auszuführenden Analyse ab. Die andere Alternative ist ja *Bestimmung der benötigten Residuale* und Ausführen des Schätzens an Hand derselben. Besonders, wenn das Material gering an Umfang ist und die Regressionsgleichung eine komplizierte Form hat, ist das letztere Verfahren oft zweckmässiger. Gegebenerweise kommt hierbei der technischen Ausführungsweise der Rechnungen ihre eigene Bedeutung zu. Oft ist es auch angezeigt, zuerst graphisch die Art der betreffenden Regressionsbeziehung zu prüfen. Indem man hierfür das Residual einer jeden Beobachtung errechnen muss, stellt es sich natürlich dann vorteilhafter, auch die Berechnung selbst mit Verwertung derselben durchzuführen.

Beim Testen der Signifikanz der Ergebnisse ist in den verschiedenen Schätzphasen als *Anzahl* $(= n')$ der Beobachtungen diejenige *von Freiheitsgraden* zu nehmen, die der betreffenden Residuale jeweils zugehört. Das gleiche Prinzip gilt in Bezug auf die zur Bestimmung des Standardniveaus der zusätzlichen Veränderlichen benötigte Regressionsgleichung. Gründet sich diese auf das Beobachtungsmaterial selbst, dann ist die *Zahl der von ihr gebundenen Freiheitsgrade in Abzug* zu bringen. Wenn sie sich dagegen auf ein gänzlich aussenstehendes Material gründet, dann bindet die Bestimmung des Standardniveaus selbstverständlich keine Freiheitsgrade des Beobachtungsmaterials.

Beim Anwenden des phasenweisen Regressionsverfahrens kann die Signifikanz einer jeden zusätzlichen Veränderlichen einfach derart geprüft werden, dass man die Signifikanz der betreffenden Regressionsbeziehung durch Anwendung der Varianzanalyse testet (vgl. S. 74 und z.B. STEEL—TORREY 1960, S. 172—173, DRAPER—SMITH 1966, S. 243—262). Im Zusammenhang mit dem Demonstrationsmaterial *(Dem.B. 119, 123_3)* ist in der vorliegenden Arbeit zur Prüfung das von LINDER (1960, S. 182) angegebene Verfahren angewandt worden, indem es auf eine beliebige Anzahl unabhängiger Variablen verallgemeinert wurde. Auf Grund der *Bestimmtheit (B)* erhält man dann als Testwert im F-Test

$$F = \frac{(n-p-1)\,B}{p\,(1-B)} \qquad (f:\ p, n-p-a)\,. \tag{77.1}$$

Falls der so gefundene Wert signifikant ist, kann man den Schluss ziehen, dass die in Frage stehende zusätzliche Veränderliche *ihrerseits den Betrag der* jeweiligen *Reststreuung signifikant reduziert* hat.

52. ANALYSIEREN DER QUALITATIVEN FAKTOREN

521. Prüfung der qualitativen Variation auf signifikante Unterschiede

5211. Kovarianzanalyse

Die Unterschiede zwischen qualitativen Klassen können auf ihre Signifikanz mittels der Kovarianzanalyse in erster Linie von zwei verschiedenen Standpunkten geprüft werden (vgl. z.B. COCHRAN 1957, STEEL—TORREY 1960, S. 305—310):

a. Auf Grund derselben kann untersucht werden, ob die *Regressionsbeziehung* selbst in den verschiedenen Klassen der qualitativen Variation übereinstimmender Art ist, oder ob zwischen denselben diesbezügliche signifikante Unterschiede bestehen.

b. Desgleichen kann mit ihrer Hilfe untersucht werden, ob zwischen den *Klassenmittelwerten* der qualitativen Variation im Wert der abhängigen Variable (y_i) signifikante Unterschiede vorkommen, wenn zugleich an Hand der Regressionsbeziehung die Unterschiede zwischen den betreffenden Klassenmittelwerten der unabhängigen Variable (x_i) berücksichtigt werden.

Beide vorgenannten Prüfungen können entweder universell im Rahmen des gesamten Beobachtungsmaterials (u.a. *Dem.B. 97)* oder gesondert zwischen einzelnen Klassen paarweise *(Dem.B. 100_2, 115)* vorgenommen werden. Letzten Endes liefert diese Prüfphase den Ausgangspunkt beim Erwägen dessen, in welcher *Art der Klassenkombinationen* es jeweils zweckmässig ist, die qualitative Variation zu berücksichtigen.

Welche Form in der Ausführung man jeweils am zweckmässigsten benutzen wird, hängt einerseits von den an die auszuführende Analyse zu stellenden

Anforderungen ab. Andererseits ist die Beschaffenheit des zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials zu beachten. Im Zusammenhang des Demonstrationsmaterials (u.a. *Dem.B. 97, 99, 100_2)* ist seinerseits das Bestreben geltend gemacht worden, nur einige solche Analyseverfahren darzulegen, die sich besonders zu seiner Wachstumsanalyse zu eignen scheinen. Auch in diesem Rahmen dürfte sich eine Vorstellung von den Möglichkeiten der Kovarianzanalyse als Hilfsmittel in der Wachstumsanalyse ergeben.

In zahlreichen Fällen reicht als Grundlage beim Vornehmen der Klassifikation der qualitativen Wachstumsfaktoren ein gewisser *Gesamtüberblick von den Abhängigkeiten* zwischen den dabei in Frage kommenden Gruppen aus. In solchen Fällen kann man sich damit begnügen, die Wachstumsanalyse ausschliesslich auf Grund der Reststreuung der Regressionsgleichungen auszuführen *(Dem.B. 121_1)*. Sie gibt die Möglichkeit, gleichzeitig sowohl die Unterschiede zwischen den Regressionskoeffizienten als auch diejenigen zwischen den Regressionsmittelwerten auf ihre gemeinsame Signifikanz zu prüfen.

In dieser Analyse schätzt man die Regressionsgleichungen für alle in der Analyse in Frage kommenden Regressionsbeziehungen verschiedener Stufe, *von der* gemeinsamen *Regressionsgleichung des gesamten Materials ausgehend.* Die Grundlage für sie stellen die Beträge der Restquadratsummen der betreffenden Gleichungen sowie die entsprechenden Zahlen der Freiheitsgrade dar. Der Verlauf der Analyse folgt den allgemeinen Grundsätzen der Varianzanalyse (vgl. z.B. EISENHART 1947). Auf Grund der Signifikanz der Unterschiede zwischen den in die Analyse einbezogenen Klassen ist es dann möglich, Folgerungen hinsichtlich der Grundlagen der Klasseneinteilung sowohl allgemein betreffs der gegebenen qualitativen Faktoren als auch zwischen den einzelnen Klassen zu ziehen.

Wünscht man auf Grund der Ergebnisse dieser allgemeinem Analyse fortzufahren oder sonstwie das Material in näheren Einzelheiten zu untersuchen, so kann man je nach der Art der Aufgabe die Signifikanz der Unterschiede zwischen den Klassen hinsichtlich der qualitativen Wachstumsfaktoren testen, und zwar entweder nur zwischen den Regressionskoeffizienten oder den Regressionsmittelwerten oder nötigenfalls auch bei beiden *(Dem.B. 121_2)*. In der Wachstumsfunktion ist ja *Verschiedenheit der Regressionskoeffizienten* gleichbedeutend mit dem *Auftreten von verschiedenem Wachstumsrhythmus* bei den Baumindividuen oder Beständen, *Verschiedenheit der Mittelwerte* wiederum bringt die *Existenz eines Niveauunterschieds* zum Ausdruck. Bezüglich der beim Ausführen der Analyse zu befolgenden Verfahren sei auf die zuvor zitierten Werke sowie z.B. auf die von SNEDECOR (1957, S. 394—412, 420—429) angeführten Gesichtspunkte hingewiesen.

5212. Varianzanalyse der Residuale

Die Gleichung einer linearen Regressionsbeziehung mit *m* unabhängigen Variablen lautet in vollständiger Form:

(78.1) $$y = \hat{y} + \Delta y_x = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_mx_m + \Delta y_x \; ,$$

worin das Glied Δy_x das **Residual** repräsentiert (vgl. z.B. DRAPER—SMITH 1966, S. 86). Laut der an die Regressionsgleichung gestellten Bedingung ist Δy_x eine *normalverteilte, unabhängige Zufallsvariable* mit dem Erwartungswert $\mathbf{E}(\Delta y_x) = 0$. Ihre Variation, welche die Reststreuung der Regressionsgleichung bestimmt, ist unter normalen Regressionsvoraussetzungen von den Werten der unabhängigen Variablen unabhängig (vgl. COCHRAN 1957, S. 277).

Der *Ausgangspunkt* für die Varianzanalyse der Residuale ist die Gleichung der *Totalregression des gesamten Beobachtungsmaterials*, mit deren Residualen die Analyse ausgeführt wird. Als Gesamtheit bilden diese nach dem zuvor Gesagten eine Menge von Beobachtungen, die die zum Ausführen einer Varianzanalyse zu stellende Voraussetzung befriedigt (vgl. COCHRAN 1947, S. 22—23). Die eventuelle Existenz der Systematizität unter den Abweichungen kann selbstverständlich bei Bedarf mittels irgendeines geeigneten Prüfverfahrens nachgeprüft werden (vgl. z.B. LIENERT 1962, S. 161—175), da sie ihrerseits auf die Werte der Residuale einwirkt, je nachdem, wie diese auf die Spannweite der unabhängigen Variablen verteilt sind.

Die eigentliche Analyseaufgabe besteht darin, die Unterschiede zwischen den Klassenmittelwerten der Residuale mittels der Varianzanalyse zu testen *(Dem.B. 101)*. Eventuelles Vorkommen signifikanter Unterschiede ist hierbei als Anzeichen davon zu deuten, dass das *Beschreiben des Wachstumsvorgangs* bei solchen Klassen *im Rahmen einer gemeinsamen Regressionsgleichung nicht geeignet* sein dürfte.

Nachdem die Gleichung der Totalregression aus dem Beobachtungsmaterial geschätzt worden ist, ist das Ausführen der Varianzanalyse der Residuale eine *rechnerisch* verhältnismässig *einfache Aufgabe*. Der darin benötigte Betrag der Quadratsumme der Beobachtungen ergibt sich einfach auf Grund der Restquadratsumme der betreffenden Gleichung. Die Summen der Residuale einer jeden benötigten Klassenkombination *ij* wiederum erhält man von der Gleichungsform (78.1) ausgehend einfach nach der Formel

(79.1) $$\sum_{n_{ij}} (y_{ij} - \hat{y}_{ij}) = \Sigma\, y_{ij} - n_{ij}a - b_1\Sigma x_{1ij} - b_2\Sigma x_{2ij} - \ldots - b_m\Sigma x_{mij} = \sum_{n_{ij}} (\Delta y_x)_{ij} \, .$$

Hiernach geht die Analyse in normaler Weise weiter. In der Zahl der Freiheitsgrade ist zu berücksichtigen, dass nach erfolgtem Schätzen der Gleichung der Totalregression den Residualen *n–m–1* Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. In der Varianzanalyse bestimmt dies seinerseits die Zahl der Freiheitsgrade für die Zufallsstreuung.

522. Bemessen der Wirkung der qualitativen Wachstumsfaktoren

5221. Das Prinzip der Bemessung

Im vorigen Kapitel wurde das Testen der Signifikanz der Unterschiede besprochen, die in der Wirkung qualitativer Wachstumsfaktoren festzustellen ist. Als Ziel dieser Phase der Analyse kann man vom Standpunkt des zu betrachtenden Wachstumsvorgangs die *Suche nach einer zweckmässigen Klasseneinteilung* und das Erstellen derselben erachten. Wenn in der Analyseaufgabe diese Phase durchgeführt ist und die erforderlichen Klassen gebildet worden sind, besteht die natürliche Fortsetzung hierzu darin, *die betreffenden Wachstumsvorgänge zu bemessen*, z.B. indem man für jede Klasse gesondert eine Wachstumsfunktion schätzt. Damit diese Bemessung unter Beachtung genügender Konsequenz erfolgen könnte, muss sie im Rahmen der zur Untersuchung vorliegenden Gesamtheit stattfinden. Diese Phase kann man als Bemessung der qualitativen Wachstumsfaktoren ansehen.

Es ist im Zusammenhang mit der vorliegenden Untersuchung nicht für notwendig erachtet worden, eingehender die mit dieser Bemessung verknüpften Methoden zu erläutern. Zu diesem Zweck steht schon gegenwärtig eine grosse Anzahl verschiedener Alternativen zu Gebote. Im folgenden werden nur einige in Frage kommende Verfahrensmöglichkeiten zuvorderst in dem Sinne besprochen, dass die mit dem fraglichen Problem verbundene grundsätzliche Seite zugleich beleuchtet wird.

5222. Schätzen der Indexwerte

Ein allgemein brauchbares Mittel für solche Bemessungsaufgaben ist das Schätzen geeigneter Indexwerte. Man kann annehmen, dass diese mit gewissen Voraussetzungen im quantitativen Sinn die Wirkungsbeziehung der qualitativen Wachstumsfaktoren zu den zu erklärenden Wachstumsvorgängen angeben. Das im folgenden zur Darstellung kommende Verfahren gleicht in seinem prinzipiellen Aufbau dem von NÄSLUND (1944, S. 58—61) angewandten, obgleich NÄSLUND bei der Verwendung der Indexwerte als Masszahlen der qualitativen Wachstumsfaktoren das Ziel im Auge hatte, diese als messbar der Regressionsbeziehung mit einzubeziehen. Ein solches Vorgehen ist gegebenerweise stets möglich, obgleich hinsichtlich seiner Bedeutung auch Kritik geübt werden kann.

Da das Residual Δy_x der Regressionsgleichung (78.1) eine unabhängige Veränderliche ist, kann *an Hand seiner durchschnittlichen Grösse* in jeder Klasse *die Bemessung* der Wirkung qualitativer Wachstumsfaktoren *erfolgen.* Wenn sich die Regressionsgleichung total auf das Beobachtungsmaterial gründet, gibt ein jedes Residual die Differenz der betreffenden Beobachtung von dem Niveau der Regressionsgleichung an, *auf das die Indexwerte* somit *basiert werden.* Dabei kann man ja einen gewissen Ausgangswert aufstellen, von dem aus die eigentlichen Indexwerte gerechnet werden, wie NÄSLUND (l.c.) verfahren ist. Wenn die Regressionsgleichung auf Grund der logarithmischen Transformation zustandegekommen ist, wie es sich sowohl bei Anwendung des Wachstumskoeffizienten als auch der KOLLERschen Funktion verhält, dann entspricht das Residual dem Verhältnis zwischen dem Beobachtungswert und dem Wert der Regressionsgleichung, wobei letzterer die Masszahl $= 1$ hat. Seinem Wesen nach *eignet sich* somit *der logarithmische Wert* von diesen beiden Alternativen im Grunde *besser zur Schätzung von Indexwerten.* Da bei Verwendung desselben die Indizes auf Grund des Mittelwerts der Residuale bestimmt werden, vertreten sie somit das geometrische Mittel der entsprechenden einzelnen Verhältniswerte.

Wenn der Index auf Grund nur eines qualitativen Wachstumsfaktors geschätzt werden kann, sind die erhaltenen Werte in der Regel als solche zu verwenden. Statt des Mittels aus dem gesamten Material ist es hierbei jedoch möglich, *eine bestimmte Klasse zum Grundwert zu nehmen*, mit dem die Werte der übrigen Klassen verglichen werden *(Dem.B. 121_3).* Wenn dagegen die Indexwerte für zwei- oder mehrfache Klassenkombinationen zu schätzen sind, dann steht ein Grundmaterial zur Verfügung, aus dem weiter *durch Ausgleich verbesserte Indexwerte* für die verschiedenen Klassen bestimmt werden können *(Dem.B. 117_1).*

In diesem Fall kann das Ausgleichen nach folgendem, auch allgemeiner anwendbaren Prinzip geschehen. Der Ausgangspunkt ist, dass die *Verhältniszahl q der Mittelwerte* der verschiedenen Klassen einer jeden qualitativen Variablen eine von der übrigen Variation des Beobachtungsmaterials *unabhängige Konstante* ist. Die Aufgabe besteht jetzt darin, die Werte von q an Hand des

Beobachtungsmaterials zu schätzen. Bezeichnet man (vgl. *Dem.B. 117_1*) die betreffenden Werte der Variablen r (z.B. der Waldtypen) mit dem Symbol q_{ri} und entsprechendermassen diejenigen der Variablen s (z.B. der Behandlungsklassen) mit q_{sj} sowie den Mittelwert der auszugleichenden Variablen y des gesamten Beobachtungsmaterials mit $\bar{y}_{..}$, so erhält man für eine gewisse Klassenkombination $r_i s_j$ die Schätzung

(81.1) $$\hat{y}_{risj} = \hat{q}_{ri}\, \hat{q}_{sj} \bar{y}_{..} \,.$$

Das Schätzen wird nun so ausgeführt, dass sie die Bedingung

(81.2) $$\sum_j \sum_i w_{risj} (\bar{y}_{risj} - q_{ri}\, q_{sj} \bar{y}_{..})^2 = \text{Minimum}$$

befriedigt, worin w_{risj} und $\bar{y}_{risj}$ den Gewichtungsbetrag bzw. den Mittelwert von $\bar{y}$ der Klassenkombination $r_i s_j$ bezeichnen. Die zu schätzenden Parameter werden in diesem Fall die Verhältniszahlen einer jeden Klasse q_{ri} und q_{sj} sein, bezüglich deren beim Minimalisieren partiell deriviert wird. So ergibt sich für eine gegebene Verhältniszahl q_{ri} die Schätzung

(81.3) $$\hat{q}_{ri} = \frac{\sum_j (w_{risj}\, q_{sj} \bar{y}_{risj})}{\sum_j (w_{risj}\, (q_{sj})^2 \bar{y}_{..})} \,.$$

Entsprechenderweise erhält man für q_{sj} einen Wert, in dem lediglich q_{ri} und q_{sj} ihre Stellen vertauscht haben.

Die Rechenoperation selbst muss vermittels Iteration ausgeführt werden (vgl. DEMING 1948, S. 115—117, 121—124). Als Ausgangspunkt kann man beispielsweise $\bar{y}_r$, d.h. die Mittelwerte des Beobachtungsmaterials nach den Klassen der Variablen r nehmen, mittels deren die Näherungswerte für die q_s der Variablen s bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser Näherungen in die Gleichung (81.3) werden wiederum auf Grund derselben die Werte für die q_r ermittelt. Diese dienen ferner zum Auffinden neuer Näherungen für die q_s usf. Auf diese Weise fährt man fort, bis die Werte der gewünschten Genauigkeit erzielt worden sind. Die Schätzungen von $\bar{y}$ für eine jede Klassenkombination $r_i s_j$ erhält man durch Einsetzen der geliefereten Verhältnisschätzungen in Gleichung (81.1). Da in diesem Zusammenhang Indexwerte in Frage stehen, wird in der Berechung das Mittel des gesamten Materials vom Indexgrundwert $\bar{y}_{..} = 1$ vertreten.

Wenn die Regressionsfunktion logarithmisch ist, sind die Verhältniszahlen Differenzen vom Mittelwert $\bar{y}_{..} = 0$, und die Ausgleichung kann additiv statt multiplikativ erfolgen. Hierbei kann man die Rechnungen z.B. nach dem von LINDER (1960, S. 119—122) angegebenen Verfahren ausführen.

Im Vorstehenden ist die Ausgleichung in zwei Richtungen dargestellt. In völlig entsprechender Weise kann man sie nach dem *Iterationsprinzip* sowohl multiplikativ als additiv *auch in mehreren Richtungen* ausführen, wobei Iteration jeder Variablen der Reihe nach vorgenommen wird, jeweils mit Verwendung der zuletzt erhaltenen Näherungen als Ausgang für die Verhältniszahlen der anderen Variablen (vgl. auch LOKKI 1960).

Eine zweite Möglichkeit zum Schätzen der Indexwerte in Verbindung mit Wachstumsfunktionen ist deren *Gründen auf das konstante Glied der Regressionsgleichung (Dem.B. 127_2, 127_3).* Hierbei kann man von dem gleichen Prinzip ausgehen, welches bereits beim Besprechen des Schätzens der Wachstumsfunktionen an Hand des Beobachtungsmaterials (s. S. 41) hervortrat. Dasselbe besteht darin, dass man im Wachstumsvorgang die Regressionsbeziehung selbst, nach erfolgter Beachtung eventueller zusätzlicher Veränderlichen, in den verschiedenen Klassen der qualitativen Variation als die gleiche annimmt, so dass nur das Vorkommen von Unterschieden in deren Niveau angenommen wird. Diese können dann eben mit Hilfe der konstanten Glieder der Regressionsgleichung bemessen werden. Hierbei wird dann *beim Schätzen der* zur Indexberechnung zur Anwendung kommenden *Wachstumsfunktion* ausschliesslich *die klasseninnere Streuung* der betreffenden Klassen bzw. Klassenkombinationen *mitgenommen*. Mittels der hierauf geschätzten Regressionskoeffizienten wird *für jede Klasse* auf Grund ihres eigenen Beobachtungsmaterials *ihr eigenes konstantes Glied* bestimmt, wobei entweder dieses an sich oder, falls die Gleichung logarithmisch ist, sein entlogarithmierter Wert als Index benutzt wird. Der Grundwert eines solchen Index kann seinerseits entweder auf dem konstanten Glied irgendeiner gegebenen Klasse oder auf demjenigen des gesamten Materials basiert werden.

Die oben beschriebene Methode zur Bestimmung von Indexwerten ist im Grunde der *Diskriminanzanalyse* (vgl. z.B. LINDER 1960, S. 238–260 und WEBER 1961, S. 428–456) nahe verwandt, unter deren Zuhilfenahme es ebenfalls möglich ist, Bemessung der Wirkung qualitativer Wachstumsfaktoren vorzunehmen *(Dem.B. 122)*. Der Ausgangspunkt einer solchen Bemessung ist eine gegebene Klasseneinteilung, und ihr Gedankeninhalt ist der, dass man eine solche Funktion schätzt, mit der die Unterschiede zwischen den Klassenmittelwerten möglichst gross werden, indem wiederum der Betrag der klasseninneren Streuung möglichst klein bleibt. Das Verfahren kann auf Grund einer beliebigen Anzahl erklärender Variablen angewandt werden. Man kann auch folglich mit seiner Hilfe neben der Wirkung der Hauptveränderlichen im Schätzen auch solche messbare *zusätzliche Veränderlichen einbeziehen*, die vom Standpunkt der in Frage stehenden Bemessung Bedeutung besitzen. Namentlich beim Analysieren eines heterogenen Materials kann dieser Umstand mit Hinsicht auf das Ergebnis erhebliche Vorzüge haben. Zur Bestimmung von Indexwerten ist es möglich, eine derartige *Trennfunktion* so aufzubauen, dass sie gewissen als Grenzwerte ausersehenen Klassen gewünschte Indexwerte erteilt, und die Werte des übrigen Materials ihnen entsprechend anpasst.

5223. Ermittlung der ausgeglichenen Regressionsgleichungen

Das Schätzen der Indexwerte auf die oben beschriebene Weise bedeutet, dass sich beim Beschreiben auf Grund derselben nur das Niveau des Wachstumsvorgangs, beispielsweise bei der Wachstumskoeffizientenfunktion nur ihre Masstabskonstante q ändert. Dagegen bleibt die Regressionsbeziehung selbst unverändert, was bedeutet, dass die Wachstumsgeschwindigkeit in allen Klassen der qualitativen Variation die gleiche sein wird. Dies entspricht jedoch zumeist nicht dem tatsächlichen Sachverhalt, denn *die Wirkung qualitativer Wachstumsfaktoren bezieht sich* selbstverständlich *ausser auf das Niveau* des Wachstumsvorgangs normalerweise *auch auf dessen Rhythmus*. Daher ist das vorher betrachtete Indexverfahren in gewissem Sinn *ein einseitiger Ausweg* zur Bemessung der qualitativen Variation. Ihre Ausführung in solcher Weise, dass sämtliche Parameter der Regressionsgleichung in Rücksicht genommen werden, führt indessen zu erheblich umständlicheren Verfahren.

Solches Vorgehen, in dem die ganze Regressionsgleichung dem Schätzen der Indexwerte zugrunde gelegt wird, hat die gleiche Aufstellung zum Ausgangspunkt wie das zuvor (S. 80) beschriebene Ausgleichen der Indexwerte. Der prinzipielle Unterschied besteht nur einerseits darin, dass die *Verbesserungen getrennt allen Parametern* der Regressionsgleichung *erteilt werden*. Sie können in diesem Fall als Zuschlag zum Ausgangswert des Parameters oder auch in Form eines Korrektionsfaktors geschehen. Zum Ausgangspunkt eignet sich beispielsweise die Regressionsgleichung des ganzen Materials, aber im Prinzip kann man jede beliebige Ausgangsweise wählen. Formell einwandfreie Lösungen auf diesem Weg führen zu Iterationsverfahren, wobei die Schwierigkeit oft darin besteht, eine *Lösungsart mit konvergenter Iteration* zu finden.

Als Beispiel einer Lösung, mittels deren es möglich erscheint, im Ausgleichen der gesamten Regressionsgleichung brauchbare Resultate zu erzielen, ist im Demonstrationsmaterial *(Dem.B. 117₂)* folgendes Vorgehen auf eine Regressionsgleichung mit einer unabhängigen Variable angewandt worden. Ein entsprechendes Prinzip kann selbstverständlich auch bei mehreren Variablen benutzt werden. Die Rechenoperationen werden nur dann in entsprechendem Mass mühevoller. *Beim Vorgehen werden* die für das Schätzen der Regressionsgleichung $y = a + bx$ benötigten *Summen, Quadratsummen und Produktsummen der Beobachtungswerte* (Σx, Σy, Σx^2 und Σxy) getrennt mittels eines geeigneten, z.B. des von LINDER (1960, S. 119–122) angegebenen Verfahrens *ausgeglichen*. Dabei werden für jede Klasse r_i und s_j (s. S. 81) gesondert die Schätzungen der Mittelwerte $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x^2}$ und $\overline{xy}$ vorgenommen. Nachdem so die benötigten Werte $\bar{x}_{i.}$, $\bar{y}_{i.}$, $\overline{x^2}_{i.}$ und $(\overline{xy})_{i.}$ sowie entsprechenderweise $\bar{x}_{.j}$, $\bar{y}_{.j}$, $\overline{x^2}_{.j}$ und $(\overline{xy})_{.j}$ erhalten worden sind, ergeben sich für eine gegebene Klasse i der Variablen r (bzw. Klasse j der Variablen s) die ausgeglichenen Parameterwerte einfach aus den Gleichungen

$$\hat{b}_{i.} = \frac{(\overline{xy})_{i.} - (\bar{x}_{i.})(\bar{y}_{i.})}{(\overline{x^2})_{i.} - (\bar{x}_{i.})^2} \text{ und} \tag{83.1}$$

$$\hat{a}_{i.} = \bar{y}_{i.} - b_{i.}\bar{x}_{i.}\,, \tag{83.2}$$

wobei die ausgeglichene Regressionsgleichung folgenden Wert erhält:

$$\hat{y}_{i.} = a_{i.} + b_{i.}x\,. \tag{83.3}$$

Indem man nun als Ausgangspunkt die Gleichung der Regression des gesamten Beobachtungsmaterials $\hat{y}_{..} = a_{..} + b_{..}x$ benutzt, kann man auf Grund der Differenz $\hat{y}_{i.} - \hat{y}_{..}$ (bzw. $\hat{y}_{.j} - \hat{y}_{..}$) die logarithmischen Werte des Indexes

$$\log c_i = \hat{y}_{i.} - \hat{y}_{..} = (a_{i.} - a_{..}) + (b_{i.} - b_{..})\,x \tag{83.4}$$

für jedes benötigte Alter (x) bestimmen.

6. DEMONSTRATIONSMATERIAL[1]

61. BAUMINDIVIDUELLES MATERIAL

6101. Beschreibung des Materials

Als Demonstrationsmaterial zur Wachstumsanalyse auf Grund der baumindividuellen Beobachtungen sind Stammanalysen der Probebäume benutzt worden, die bei einer jeden Bestandesprobefläche durch Stichprobenerhebung auf Grund der Durchmesserverteilung entnommen wurden. Beim Ausführen der Stammanalysen wurden die Durchmesser aus den Schnitten, ausgehend von demjenigen am Stammende, in Abständen von 1 Meter und in jedem Schnitt, beginnend am Zeitpunkt der Messung, in Intervallen von 5 Jahresringen gemessen.

Im Demonstrationsmaterial sind 6 Stammanalysenprobeflächen mit zusammen 51 Probebäumen enthalten, die in den Jahren 1961 und 1962 als Schülerarbeiten der Forstinstitute Kuru und Rovaniemi gemessen wurden.

In Tabelle 85 sind Angaben über das Stammanalysenmaterial angeführt. Sie enthält einige bestandesweise Merkmalswerte, die den Holzbestand der Probeflächen charakterisieren wollen. Ihr mittleres Alter ist auf Grund des an Hand der Jahresringe ermittelten Stumpfalters (vgl. ILVESSALO 1965, S. 101) der Probebäume bestimmt worden. Die Indexwerte der Tabelle werden weiter unten (S. 86) besprochen.

Es wurde versucht, die Auswahl der zum Demonstrationsmaterial ausersehenen Stammanalysenprobeflächen so zu treffen, dass sie hinsichtlich der Analyse verschiedene Alternativen vertreten. Die Probeflächen Kuru A und Kuru B sind aus strukturell fast entsprechenden, ungefähr gleichaltrigen Kiefer-Fichte-Mischbeständen entnommen. Kuru C wiederum stammt aus einem ungleichaltrigen Bestand mit nur einer Holzart, der jedoch in den Voraussetzungen seines Wachstums den vorerwähnten entspricht. Die Probeflächen von Kuru repräsentieren die mittels Hieben behandelten forstlichen Bestände. Diejenigen von Rovaniemi hingegen sind Vertreter des für Nord-Finnland typischen, langsam gewachsenen, im Naturzustand befindlichen oder ähnlichen Bestandtyps und besitzen im Vergleich zu den vorigen einen schwachen Holzbestand. Auf diese Weise wurde versucht, den Einfluss verschiedenartiger Wachstumsvorgänge auf die betrachteten Wachstumsfunktionen hervorzubringen.

In erster Linie hat das auf Stammanalysen basierende Material den Zweck, die zu betrachtenden Wachstumsfunktionen vom Standpunkt des einzelnen Baums zu beleuchten. Zugleich kann man auf Grund derselben auch die bestandsinnere Variabilität der Wachstumsfunktionen darstellen. Weiterhin kommt hiermit auch der Aufbau der Bestandesfunktion aus den baumindividuellen Funktionen zur Veranschaulichung. Dieser baumindividuelle Teil des Demonstrationsmaterials besitzt in vieler Hinsicht grundlegende Bedeutung.

6102. Schätzen der Wachstumsfunktionen

84. Auf Grund des Stammanalysenmaterials ist eine Reihe von Schätzungen mittels der logarithmischen Regressionsgleichung (65.3) der KOLLERschen *Zuwachsfunktion* durchgeführt worden. Dabei sind die Zuwachsbeträge der 5-jährigen Perioden als Beobachtungswerte zum

[1]) Aus rechnerischen Ursachen sind beim Demonstrationsmaterial die BRIGGSschen Logarithmen angewandt worden und die Ergebnisse in den entsprechenden Werten angegeben. Eine Ausnahme machen jedoch die Parameterschätzungen der KOLLERschen Funktion in den Tabellen 86, 90 und 108, die wegen des Charakters der Funktion zur Veranschaulichung in Fassung der natürlichen Logarithmen gebracht worden sind.

Tabelle 85. Angaben über das *Stammanalysenmaterial*

Gebiet	Probefläche	Probebäume			Indexwerte auf Grund von q der (65.3)						Bestandesweise Merkmalswerte der Probeflächen				
					Zwischen		*Im Rahmen der Probeflächen*								
							Total	Kiefer	Fichte	Birke					
								Durchschnittlicher Wert (Spannweite der einzelnen Probebäume)							
		Kiefer	Fichte	Birke	*Gebieten*	*Probeflächen*					Mittl. Alter J.	Stammzahl je ha	Grundfläche m²/ha	Oberhöhe m	Masse fm/ha
Kuru	A	4	4			153	100	110 (94—160)	90 (42—186)		80	470	28	27	327
	B	6	6			141	100	110 (70—154)	91 (59—169)		70	540	21	22	216
	C		8			54	100		100 (49—247)		120	410	29	28	357
Gesamtes Gebiet		10	18		685	100									
Rovaniemi	D	3	2	3		231	100	200 (115—449)	25 (25—26)	130 (60—242)	115	1000	19	18	131
	E	2	5			21	100	404 (169—7500)	68 (16—168)		210	540	11	13	65
	F		8			441	100		100 (65—143)		105	430	10	16	72
Gesamtes Gebiet		5	15	3	23	100									
Gesamtes Material		15	33	3	100										

Zeitpunkt des mittleren Jahres einer jeden Periode benutzt wurden. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabellen 86 und 88 wiedergegeben. In der ersteren sind die Schätzungen der Funktionsparameter und in der letzteren wiederum einige Kennwerte zur Veranschaulichung der Effektivität des Schätzens eingetragen. Um eine Vorstellung von der Grössenordnung der Parameter zu vermitteln, sind die gewonnenen Werte sowohl als ursprüngliche, logarithmische als auch den Werten der eigentlichen Funktion (64.1) entsprechend aufgenommen worden. Die *a*- bzw. *q*-Werte in der Tabelle entsprechen somit dem Zuwachs von Fünfjahresperioden, aber diese Ergebnisse können ja so umgewandelt werden, dass sie dem Durchschnitt des jährlichen Zuwachses entsprechen. Sie geben den Funktionen einen Masstab (vgl. S. 64), der dessen Betrag in dm³ bemisst.

In Tabelle 85 sind zur Wiedergabe der Variation im Material gewisse *Indexwerte* auf Grund des Parameters *q* der KOLLERschen Funktion (s. S. 81—82) aufgenommen worden, um die Niveauverhältnisse der verschiedenen Wachstumsvorgänge zu veranschaulichen. Diese Verhältniszahlen einer jeden Teilpopulation verschiedener hierarchischer Stufen, d.h. einer jeden Probefläche, des gesamten Materials von Kuru bzw. Rovaniemi sowie schliesslich für das gesamte Beobachtungsmaterial, sind so umgestaltet, dass in jedem Fall das konstante Glied der betreffenden Grundfunktion = 100 gesetzt worden ist.

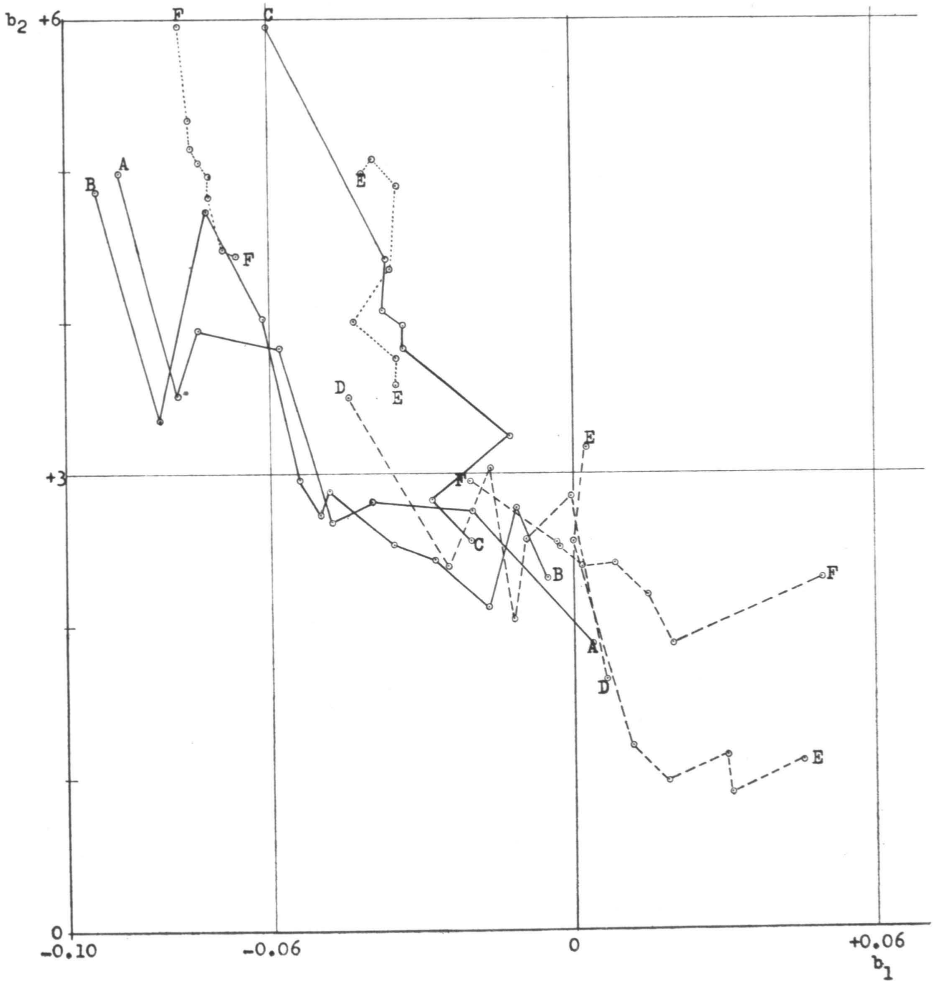
In Tabelle 88 finden sich zur Anzeige der Effektivität des Schätzens die Werte der **Bestimmtheit** (*B*, vgl. z.B. LINDER 1960, S. 172), die denjenigen Teil der Gesamtstreuung angibt, der jeweilig im Schätzen erklärt worden ist. Für die **Verhältniszahlen der Streuung** ferner liegt als Basiswert diejenige *Standardabweichung* (s_y), die auf Grund der Summe der inneren Reststreuung aller Probebäume geschätzt wurde, so dass der hierauf beruhende Wert e^{s_y} die Verhältniszahl = 100 vertritt. Der **Vertrauenskoeffizient** wiederum gründet sich einfach

Tabelle 86. Parameterwerte der Schätzungen für die KOLLERsche Funktion
Stammananalysenmaterial

Gebiet	Probefläche	Logarithmische Funktion (65.3)			Eigentliche Funktion (64.1)	
		a	$b_1 = -k$	$b_2 = m$	e^{-k}	$q\ 10^6$
		Wert der gesamten Probefläche		*(Spannweite der einzelnen Probebäume)*		
Kuru	A	−6.37 (−10.75—−3.95)	−0.0514 (−0.0895 —+0.0034)	3.276 (1.867—4.982)	0.950 (0.914—1.003)	1711 (21.5—19233)
	B	−5.97 (−10.93—−3.72)	−0.0418 (−0.0938 — −0.0056)	2.997 (2.121—4.872)	0.958 (0.910—0.994)	2552 (18.0—24200)
	C	−9.95 (−17.15—−5.67)	−0.0254 (−0.0598 — −0.0125)	3.649 (2.566—5.942)	0.975 (0.942—0.988)	476 (0.0358—3440)
Gesamtes Gebiet		−6.62	−0.0187	2.832	0.981	1340
Rovaniemi	D	−8.65 (−11.57—−5.01)	−0.0166 (−0.0443 —+0.0121)	2.712 (1.648—3.504)	0.984 (0.957—1.012)	175 (9.41—6682)
	E	−8.79 (−11.19—−5.98)	+0.0185 (−0.0002 —+0.0456)	1.555 (0.876—3.167)	1.019 (0.9999—1.047)	152 (13.8—2525)
	F	−8.55 (−10.07—−7.01)	−0.0002 (−0.0203 —+0.0496)	2.599 (1.889—2.955)	0.9998 (0.980—1.051)	193 (42.3—905)
Gesamtes Gebiet		−8.07	+0.0120	1.900	1.012	311
Gesamtes Material		−6.98	+0.0074	2.079	1.007	930

auf die dem *t-Test* (vgl. z.B. LINDER 1960, S. 196) gemäss der *Wahrscheinlichkeit 0.95* im Schwerpunkt der Regressionsgleichung entsprechende Vertrauensgrenze. Der Koeffizientenwert selbst wird durch Umformen in entlogarithmierte Gestalt ($=e^{t_{0.05}s_y}$) erhalten.

Die baumindividuellen Werte im Rahmen einer jeden Probefläche, sowohl die Indizes in Tabelle 85 als auch die Parameterschätzungen in Tabelle 86, sind einerseits als *Gesamtwert* der Probefläche und anderseits (in Klammern) als Extremwerte ihrer Probebäume (= als *Spannweite*) eingetragen. In der letzteren Tabelle sind diese Gesamtwerte der Probeflächen und entsprechend auch dieselben der Gebiete bzw. des gesamten Materials auf Grund der Summen der inneren baumindividuellen Streuungen gewonnen worden. In Tabelle 88 wiederum sind zusätzlich zu den entsprechenden Werten (*B*-Werte der Tabelle) auch einige andere Gesamtwerte (als ihre *A*- und *C*-Werte) mit aufgenommen worden, die im Zusammenhang derselben Tabelle erklärt worden sind.



Probeflächen:

Kuru A	A———A	Rovaniemi D	D– – – – –D	Bedingte Funktion (66.2)
Kuru B	B———B	Rovaniemi E	E– – – – –E	E··········E
Kuru C	C———C	Rovaniemi F	F– – – – –F	F··········F

Bild 87. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Parametern b_1 und b_2 der KOLLERschen Funktion (65.3)
Stammanalysenmaterial

88. Der *enge Zusammenhang* des in der KOLLERschen Funktion (64.1) als Exponent ihres Potenzfunktionteils vorkommenden Parameters m $(= b_2)$, der in erster Linie für die Wachstumsgeschwindigkeit massgebend ist (vgl. S. 104), *mit* dem Parameter k des als zuwachsvermindernder Faktor auftretenden exponentialen Teils geht aus Bild 87 anschaulich hervor. Durch ihr inverses Verhältnis wird sich das Tempo der Verlangsamung des Zuwachses mit seiner Zunahmegeschwindigkeit verknüpfen. Der schon in früherem Zusammenhang hervorgetretene Umstand (vgl. S. 8), dass im Beobachtungsmaterial in der Regel überhaupt keine der letzteren Wendephase t_{I+} zugeordeneten Beobachtungen vorhanden sind, kommt auch

Tabelle 88. Werte über die Effektivität des Schätzens der KOLLERschen Funktion (65.3)
Stammanalysenmaterial

Gebiet	Probefläche	Art des Wertes[1]	Bestimmtheit (B)	Verhältniszahl der Streuung	Vertrauenskoeffizient
Kuru	A	*A*	0.861	161	1.113
		B	0.923	120	1.083
		C	0.986	55	1.120
		D	0.948 — 0.999	18 — 81	1.040 — 1.172
	B	*A*	0.875	141	1.086
		B	0.917	117	1.071
		C	0.985	53	1.129
		D	0.956 — 0.994	37 — 72	1.076 — 1.156
	C	*A*	0.871	236	1.141
		B	0.914	192	1.113
		C	0.953	149	1.280
		D	0.936 — 0.996	26 — 207	1.050 — 1.392
Gesamtes Gebiet		*A*	0.772	248	1.089
		B	0.864	191	1.068
		C	0.965	103	1.220
Rovaniemi	D	*A*	0.702	294	1.177
		B	0.920	137	1.079
		C	0.981	69	1.121
		D	0.952 — 0.993	18 — 81	1.062 — 1.206
	E	*A*	0.703	388	1.201
		B	0.901	212	1.105
		C	0.973	114	1.150
		D	0.930 — 0.990	83 — 143	1.098 — 1.314
	F	*A*	0.936	144	1.088
		B	0.945	133	1.082
		C	0.974	97	1.186
		D	0.929 — 0.989	57 — 148	1.107 — 1.351
Gesamtes Gebiet		*A*	0.531	442	1.145
		B	0.899	189	1.089
		C	0.975	98	1.152
Gesamtes Material		*A*	0.382	521	1.126
		B	0.876	198	1.046
		C	0.971	100	1.175

[1]) *A* = Totalregression des betreffenden Materials
B = Regression auf Grund der Summe der inneren Variation eines jeden Probebaums
C = Mit Freiheitsgraden gewogener Mittelwert der baumindividuellen Schätzungen
D = Spannweite der einzelnen Probebäume

hierbei vor, und es ist offensichtlich, dass der gleiche Mangel einer einseitigen systematischen Wirkung bei jeder beliebigen Wachstumsfunktion in Erscheinung tritt.

Die KOLLERsche Funktion scheint sich bezüglich des Materials von Kuru gut zur Darstellung des Zuwachses zu eignen. Dagegen ist das Ergebnis hinsichtlich des Materials von Rovaniemi deutlich weniger zufriedenstellend, was offenbar darauf zurückzuführen ist, dass sich die Funktionsform nicht gut genug dem dort auftretenden langsamen Wachstumsrhythmus anpasst. Bei der Probefläche Rovaniemi D sind die Ergebnisse noch befriedigend, aber bei den beiden anderen Probeflächen entsprechen die beim Schätzen erhaltenen Funktionen nicht mehr dem richtigen Verlauf des Wachstumsvorgangs, indem der Parameter b_1 einen positiven Wert erhalten hat. Jedoch gleichen sie das Beobachtungsmaterial selbst auch in diesen Fällen recht gut aus, wie aus den Werten in Tabelle 88 hervorgeht. Derartige Fälle können im Prinzip mit den das Wachstum messende Verfahren vertretenden Wachstumsfunktionen gleichgestellt werden (vgl. S. 14). Sie ergeben gewiss im Rahmen des Beobachtungsmaterials ein brauchbares Resultat, aber mit ihrer Hilfe kann keine zuverlässige Extrapolation stattfinden. In solchen Fällen ist es jedoch möglich, Analysen des Beobachtungsmaterials vorzunehmen; man muss dabei nur die bezüglich der Anwendung ihrer Ergebnisse bestehenden Einschränkungen im Auge behalten.

Die in Tabelle 88 zu sehenden Werte der Bestimmtheit (B) sind bemerkenswert *hoch*. Bei etwa $^2/_3$ der Probebäume sind von der Variation des Zuwachses zumindest 98 % erklärt worden, und selbst im ungünstigsten Fall wird die Grenze von 93 % nicht unterschritten. Im Hinblick auf die Werte der Bestimmtheit können doch die Werte der Vertrauenskoeffizienten als recht *gross* gelten, was zweifellos zum Teil daher rührt, dass sich der relative (logarithmische) Betrag der Abweichungen in den geringen Zuwachsbeträgen der allerersten Altersjahre gern hoch gestaltet. An Hand der die Homogenität des Materials wiedergebenden Verhältniszahlen der Streuung ersieht man, dass die Beträge der Streuung *beträchtliche Unterschiede* einerseits zwischen den verschiedenen Probeflächen und anderseits zwischen den Probebäumen in den einzelnen Probeflächen aufweisen. Zwischen den beiden Gebieten liegt wiederum in dieser Beziehung kaum eine Verschiedenheit vor. Von den gegenseitigen Beziehungen der auf verschiedenen Grundlagen berechneten bestandesweisen Funktionen (Werte A und B in Tabelle 88) geben die betreffenden Verhältniszahlen der Streuung ein gutes Bild.

Mit Rücksicht auf das eventuelle Vorkommen von Systematizität der Ausgleichsabweichungen der Beobachtungen wurde in Bezug auf vier Probeflächen (Kuru A — Rovaniemi D) an Hand ihrer Vorzeichen ein *Iterationstest* (vgl. z.B. LIENERT, 1962, S. 161—163) vorgenommen. Ein mindestens der Wahrscheinlichkeit 0,95 entsprechender Unterschied betreffs der Zufälligkeit war bei 11 Probebäumen feststellbar. Folglich sind ein vorwiegender Teil (70 %) der Probebäume solche, bei denen die *Residuale* als rein *zufälliger Art* zu deuten sind.

89. Weil die eigentliche KOLLERsche Funktion bei den Probeflächen Rovaniemi E und Rovaniemi F zu keinem befriedigenden Resultat führte, sind ferner bezüglich ihrer Probebäume die *bedingten KOLLERschen Funktionen* (66.2) geschätzt worden. Ihre Ergebnisse sind in Tabelle 90 zu sehen. Bei Rovaniemi E wurde die Bedingung t = 500 Jahre, i_t = 0,001 dm³ und bei der Probefläche Rovaniemi F die Bedingung t = 300 Jahre, i_t ebenfalls = 0,001 dm³ angewandt. Wie man sieht, entsprechen die Werte der Parameter nach den derart ausgeführten Berechnungen deutlich *dem richtigen Verlauf* des Zuwachses, wozu hinzukommt, wie sowohl aus der Tabelle 90 als auch aus Bild 87 hervorgeht, dass sich auch die Parameterunterschiede zwischen Baumindividuen sehr gering halten. Diese Art des bedingten Schätzens hat somit auch die baumindividuellen Funktionen ein und derselben Probefläche einheitlicher gestaltet (vgl. auch die betreffenden in Tabelle 104 in Klammern angegebenen Werte der Korrelationskoeffizienten). In welchem Mass durch das Aufstellen einer solchen Bedingung die aus dem Material gewonnene Information verringert wird, davon geben die Werte in Tabelle 90 eine Vorstellung. Die Bestimmtheit (B) ist insbesondere bei der Probefläche

Rovaniemi E merklich herabgegangen, was auch aus ihren Werten des *Informationsverhältnisses* (s. S. 66) ersichtlich ist. Sowohl die Verhältniszahl der Streuung, wenn man bei beiden Probeflächen die Reststreuung ihrer eigentlichen KOLLERschen Funktion zum Ausgangspunkt

Tabelle 90. Ergebnisse des Schätzens mittels der bedingten KOLLERschen Funktion (66.2)
Stammanalysenmaterial

Schätzungen der Parameter:	Funktionsform[1]	Probefläche: Rovaniemi E	Probefläche: Rovaniemi F
		Durchschnittlicher Wert[2] der Probefläche (Spannweite der einzelnen Probebäume)	
a	E	–8.36 (–5.98 — –11.19)	–8.16 (–7.01 — –10.07)
	B	–15.70 (–10.11 — –19.88)	–13.63 (–11.78 — –17.60)
$b_1 = -k$	E	+0.0215 (–0.0002 — +0.0456)	+0.00646 (–0.0203 — +0.0496)
	B	–0.0372 (–0.0347 — –0.0429)	–0.0723 (–0.0665 — –0.0775)
$b_2 = m$	E	1.386 (0.876 — 3.167)	2.413 (1.889 — 2.955)
	B	4.430 (3.590 — 5.075)	4.989 (4.427 — 5.956)
e^{-k}	E	1.022 (0.9999 — 1.047)	1.006 (0.980 — 1.051)
	B	0.963 (0.958 — 0.966)	0.930 (0.925 — 0.963)
$q\ 10^6$	E	234 (13.8 — 2525)	287 (42.3 — 905)
	B	0.152 (0.00231 — 32.4)	1.21 (0.0227 — 7.68)
Bestimmtheit *(B)*	E	0.973 (0.930 — 0.990)	0.974 (0.929 — 0.989)
	B	0.732 (0.649 — 0.976)	0.901 (0.869 — 0.972)
Informationsverhältnis $B_E : B_N$ (%)		75.2 (65.6 — 99.3)	92.5 (88.8 — 99.2)
Verhältniszahl der Streuung	E	100 (73 — 126)	100 (59 — 153)
	B	315 (113 — 432)	195 (84 — 292)
Vertrauenskoeffizient	E	1.150 (1.098 — 1.314)	1.186 (1.107 — 1.351)
	B	1.556 (1.258 — 1.862)	1.396 (1.123 — 1.779)

[1]) E = mittels der eigentlichen, B = mittels der bedingten KOLLERschen Funktion erhaltene Schätzung
[2]) Siehe Wert C in Tabelle 88.

nimmt, als auch der Vertrauenskoeffizient zeigen ihresteils an, dass eine solche *Einbusse an Information* recht *leicht eintritt*. Dieser Einbusse gegenüber fällt die Sicherheit in die Waagschale, welche der richtige Verlauf der Funktion dem Schätzen verleiht.

91_1. In Tabelle 92 sind einige Angaben zusammengestellt, welche den *Aufbau der bestandesweisen Wachstumsfunktionen aus den baumindividuellen* beleuchten sollen. Die betreffenden Berechnungen sind nur für die Probeflächen Kuru C und Rovaniemi E ausgeführt worden, in deren beiden die Heterogenität des Materials am grössten ist (vgl. Tabelle 85 und 88). Man kann daher erwarten, dass eben diese am besten den in Frage stehenden Prozess beleuchten. Die Berechnungen wurden in sämtlichen Fällen auf Grund des gleichen Beobachtungsmaterials unter Berücksichtigung der Möglichkeit von Vergleichen vorgenommen. Ihr Ausgangspunkt ist das Schätzen der Bestandesfunktion sowohl auf Grund des ermittelten Alters eines jeden Probebaums als auch eines gemeinsamen probeflächenweisen Durchschnittsalters (s. S. 41). Der Einfluss der Niveauunterschiede im Zuwachs ist weiterhin sowohl auf Grund ihrer inneren Variation als auch durch Zuhilfenahme einer zusätzlichen Veränderlichen (s. S. 41) berücksichtigt worden.

Wie man sieht, stimmen die Ergebnisse der Berechnungen bei beiden Probeflächen recht weitgehend überein. Die Begründung *auf dem baumindividuellen Alter* hat das Schätzen *zu besserem Resultat* als bei Anwendung eines gemeinsamen Alters geführt, und auf Grund der Summe der baumindividueninneren Variation wiederum ist es deutlich derjenigen der einfachen Totalavariation überlegen (vgl. auch Tabelle 88)[1]. Der dabei deutlich grössere Unterschied bei der Probefläche Rovaniemi E ist offenbar ihrer noch grösseren Heterogenität zuzuschreiben.

Das weitaus *beste Ergebnis* ergibt sich, wenn beim Schätzen *als zusätzliche Veränderliche die Masse im betreffenden Alter* benutzt wird, was bei einer logarithmischen Funktion ganz natürlich ist. Die besonders hohe Signifikanz des dabei gewonnenen Zuschusses an Erklärung (vgl. S. 74) gibt zu erkennen, dass das *so gewonnene Mehr an Information* in Hinsicht auf den Aufbau der Bestandesfunktion ganz *wesentlich ist*. Wiederum scheint das Schätzen auf Grund der inneren Variation der Probebäume, wie die Testwerte[2] unter D in Tabelle 92 zeigen, mit den weiteren Alternativen der zusätzlichen Veränderlichen wenigstens gleichwertig zu sein. Jedoch ist insbesondere im Gedanken an den praktischen Bedarf die Feststellung interessant, dass die Analyse schon einen beträchtlichen Zuschuss an Information liefert, wenn der den Zeitpunkt der Messung betreffende Beobachtungswert (der Masse z_{vt} oder des Durchmessers z_{dt}) für die ganze Reihe der Messungsergebnisse eines jeden Probebaums als zusätzliche Veränderliche verwendet wird. Dieses Ergebnis weist darauf hin, dass sich *in praktischen Aufgaben* das Verwerten einer zusätzlichen Veränderlichen *ziemlich einfach* gestalten kann. Es scheint überdies, als wäre es möglich, dann mit dem Alter der Probebäume als zusätzliche Veränderliche das Mass der in der Analyse gewinnbaren Information wesentlich zu erhöhen.

91_2. Ein näheres Präsentieren der Ergebnisse des *Schätzens mit* BACKMANs *Funktion (67.3)*, die nur bei den Probeflächen Kuru A und Rovaniemi D angewandt wurde, ist nicht als angezeigt erachtet worden. Die Werte ihrer Parameter scheinen weitgehend die gleichen Grundzüge wie auch die der KOLLERschen Funktion aufzuweisen, und zwischen den Werten des Parameters *m* beider Funktionen ist in der Tat recht deutliche Parallelität zu beobachten.

[1]) Der Test der Signifikanz des Zuschusses ist auch auf die Regressionsbeziehung bezogen worden, die sich auf der inneren Variation der Probebäume gründet, obwohl dies im Prinzip als ein getrenntes Verfahren aufzufassen ist. Jedoch wird auch hierbei mit Hilfe der zusätzlichen im Schätzen gebundenen Freiheitsgrade die Bestimmtheit vergrössert.

[2]) In diesem Fall ist auf Grund der Verhältnisse zwischen den Restvarianzen (s. z.B. SNEDECOR 1957, S. 244—250) ein F-Test ausgeführt worden, der wiederum der Feststellung gilt, ob diese als zu ein und derselben Grundvarianz gehörend betrachtet werden können. Da sie die Restvarianzen verschiedener Regressionsbeziehungen hinsichtlich ein und derselben abhängigen Variablen zusammenfassen, ist der betreffende F-Test gegebenerweise doppelseitig anzuwenden (vgl. z.B. HALD 1952, S. 379—381).

Tabelle 92. Ergebnisse über das Schätzen der bestandesweisen Funktionen
Stammanalysenmaterial

	Symbol der Rest-varianz	Auf Grund des *baumindividuellen* Alters						Auf Grund des *mittleren* Bestandesalters[1]					
		Kuru C			Rovaniemi E			Kuru C			Rovaniemi E		
		B	*f*	*F*	*B*	*f*	*F*	*B*	*f*	*F*	*B*	*f*	*F*
		B = Bestimmtheit			*f* = Freiheitsgrade			*F* = Wert im F-Test					
A. Funktionen *allein* mit der *Hauptveränderlichen*													
Schätzung der bestandesweisen Funktion gründet sich auf:													
1. Variation des Beobachtungsmaterials in ihrer Gesamtheit	s_1^2	0.836	168		0.620	228		0.717	168		0.637	228	
2. Summe der Variation innerhalb der Baumindividuen	s_2^2	0.889	161		0.870	222		0.833	161		0.830	222	
Signifikanz[2] des *Zuschusses an Erklärung*			7,161	*14.1****		6,222	*98.3****		7,161	*19.4****		6,222	*61.9****
B. Funktionen mit *einer zusätzlichen* Veränderlichen und der Funktion der Stelle A.1 als Grundfunktion													
Als zusätzliche Veränderliche:													
1. Alter des Probebaums (z_t)	s_3^2	0.842	167		0.756	227		0.745	167		0.678	227	
Zuschuss an Erklärung			1,167	*6.93***		1,227	*127****		1,167	*18.3****		1,227	*28.8****
2. Masse des Probebaums im betreffenden Alter (z_{vi})	s_4^2	0.943	167		0.959	227		0.955	167		0.951	227	
Zuschuss an Erklärung			1,167	*317****		1,227	*1898****		1,167	*883****		1,227	*1455****
3. Masse des Probebaums im Alter *t* (z_{yt})	s_5^2	0.852	167		0.644	227		0.832	167		0.811	227	
Zuschuss an Erklärung			1,167	*18.6****		1,227	*15.1****		1,167	*114****		1,227	*210****
4. Durchmesser $d_{1.3}$ im Alter *t* (z_{dt})	s_6^2							0.828	167		0.814	227	
Zuschuss an Erklärung									1,167	*110****		1,227	*217****
C. Funktionen mit *zwei zusätzlichen* Veränderlichen und dem Alter des Probebaums als eine zusätzliche Veränderliche													
Als zweite zusätzl. Veränderliche:													
1. Masse des Probebaums im betreffenden Alter (z_{vi})	s_7^2	0.945	166		0.965	226		0.955	166		0.970	226	
Zuschuss an Erklärung			1,166	*6.23**		1,226	*33.6****		1,166	*0.151-*		1,226	*140****
2. Masse des Probebaums im Alter *t* (z_{yt})	s_8^2	0.894	166		0.794	226		0.841	166		0.838	226	
Zuschuss an Erklärung			1,166	*65.7****		1,226	*164****		1,166	*9.10***		1,226	*36.8****
D. F-Test der Signifikanz der Unterschiede zwischen den Restvarianzen													
$s_2^2 : s_4^2$			161,167	*1.866****		222,227	*2.617****		161,167	*3.635****		222,227	*2.835****
$s_3^2 : s_2^2$			167,161	*1.493**		227,222	*2.296****		167,161	*1.596***		227,222	*2.320****
$s_5^2 : s_2^2$			167,161	*1.399**		227,222	*3.355****		167,161	*1.051-*		227,222	*1.357**
$s_8^2 : s_2^2$			166,161	*1.008-*		226,222	*1.952****		166,161	*1.002-*		226,222	*1.173-*

[1]) Als mittleres Bestandsalter hat man benutzt: Kuru C 130 J. und Rovaniemi E 190 J.
[2]) Die Signifikanzen sind auf die übliche Weise: fast signifikant (*), signifikant (**) und sehr signifikant (***) (vgl. PFANZAGL 1962, S. 76) bezeichnet; die nichtsignifikanten Testwerte wiederum sind mit (-) angegeben.

Beide Funktionsformen liefern auch bei den Probebäumen weit *übereinstimmende Ergebnisse.* Dieser Sachverhalt tritt besonders bei den vier derartigen Probebäumen in Erscheinung, bei denen die Funktionen nicht den normalen Verlauf des Zuwachses wiedergeben. Auch in Bezug auf die Stochastizität der Residuale kann man keinen besonderen Unterschied zwischen den beiden Funktionen aufzeigen. Während bei BACKMANs Funktion 6 Probebäume Andeutung von systematischen Abweichungen an Hand des Iterationstests (s. S. 89) aufweisen, zeigen entsprechenderweise bei der KOLLERschen Funktion 7 Probebäume den gleichen Sachverhalt.

Beim Vergleich der Funktionsformen untereinander auf Grund der Restvarianzen kann man feststellen, dass mit der KOLLERschen Funktion ein günstigeres Ergebnis im Fall von 11 Probebäumen erzielt wurde, mittels BACKMANs Funktion wiederum bei 5, unter denen 4 Kiefern sind. Es lässt sich jedoch in der Effektivität der Schätzungsergebnisse beider Funktionsformen keine nennenswerte Verschiedenheit nachweisen, denn nach dem F-Test (s. S. 91, Note 2) ist nur bei 2 Probebäumen ein fast signifikanter Unterschied festzustellen.

Als bedeutend bemerkenswerter kann man dagegen denjenigen *Unterschied* erachten, der zwischen den beiden Funktionen *betreffs der Lage der Phasenstellen* besteht. Allerdings haben sie ihren ersten Wendepunkt regelmässig zu annähernd koinzidentem Zeitpunkt. Die Maximalphase der BACKMANschen Funktion tritt jedoch regelmässig zu einem bedeutend späteren Zeitpunkt als die der KOLLERschen Funktion ein. Es hat den Anschein, dass sie eine grosse Neigung hat, sich auf einen unrealistisch späten Zeitpunkt zu verschieben; bei der KOLLER-

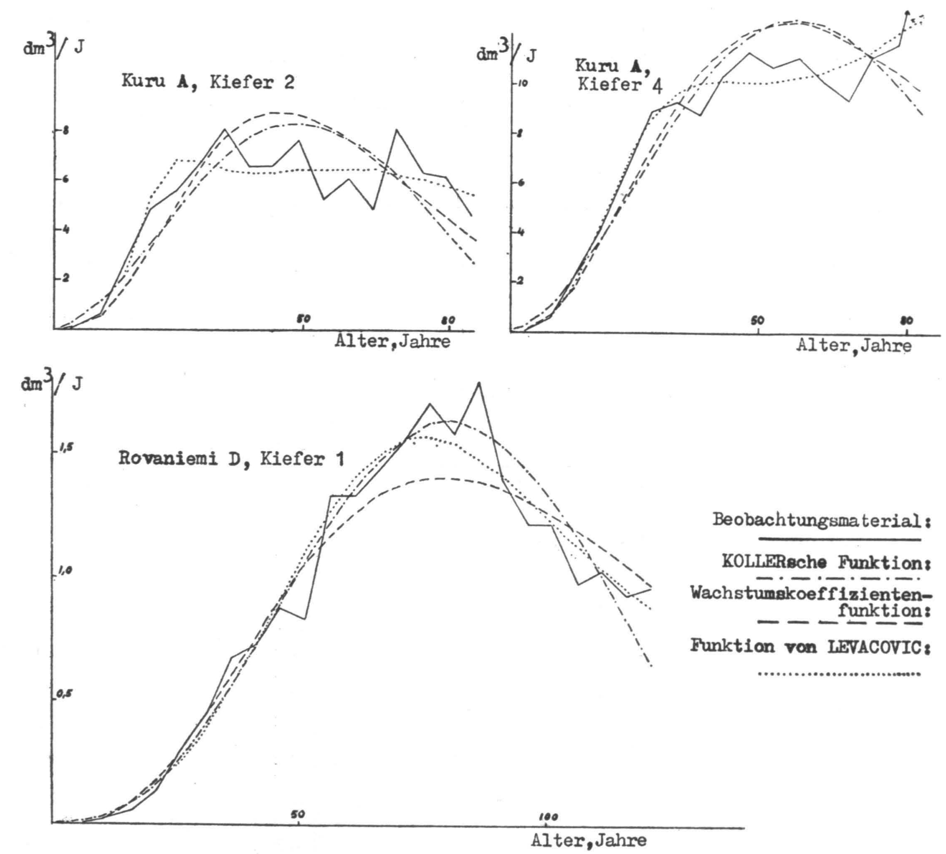


Bild 94. Der Zuwachs nach gewissen Ausgleichungsfunktionen bei einigen Belegsprobebäumen des *Stammanalysenmaterials*

schen Funktion wiederum verhält es sich eher umgekehrt. Der gleiche Zug kommt mit noch grösserem Nachdruck bei dem späteren Wendepunkt zum Vorschein. Es gibt jedoch die Möglichkeit, dass die Brauchbarkeit beider Funktionen in Beständen verschiedener Beschaffenheit abweichend ist, was gegebenerweise erst auf Grund von gründlicheren Untersuchungen festzustellen ist.

95₁. Von den Funktionsformen des Wachstums ist nur diejenige von LEVACOVIC *in der approximativen Form* dritter und vierter Potenz ($m = 3$ bzw. 4) der Gleichung (68.3) auf Grund der Probeflächen Kuru A und Rovaniemi D zur Demonstration mit der Absicht herangezogen worden, ein Bild davon zu erhalten, welchen Einfluss die Zahl der Glieder in der Reihenentwicklung auf das Schätzungsergebnis hat.

Hinsichtlich ihres Vorzeichens haben die Residuale der Regressionsgleichungen bei der Approximation beider Potenzen gewiss gleichartige Tendenz, aber auf Grund des Iterationstests (s. S. 89) kann man feststellen, dass sie in nahezu allen Fällen der Approximation vierter Potenz als zufällig gelten können, was hingegen unter den Approximationen dritter Potenz nur bei drei Probebäumen zutrifft. Die Überlegenheit der vorigen kommt vielleicht noch klarer darin zum Vorschein, dass die letztere in insgesamt vier Fällen zu einem Ergebnis geführt hat, das man nicht als logisch ansehen kann, weil sie dem Wachstum keinen monoton zunehmenden Verlauf geben. Jedoch kommt auch in einem Fall der Approximationen vierter Potenz ein Ergebnis dieser Art vor, und es hat somit den Anschein, dass man auch bei Anwendung von dieser *keine* unbedingte *Garantie für Konsequenz* der Ergebnisse hat.

Was die Werte des Wachstums anbelangt, bedingt ja die allgemeine Brauchbarkeit einer Wachstumsfunktion, dass sie auch den Verlauf des Zuwachses richtig beschreibt. Dieser Forderung wird das in Frage stehende Verfahren keineswegs gerecht, wie aus Bild 94 anschaulich hervorgeht. Es ist wieder eine Frage für sich, inwieweit die Funktion von LEVACOVIC in ihrer ursprünglichen Form (68.2) von diesen Mängeln frei ist.

95₂. Heranziehung eines Iterationsverfahrens zum Schätzen des Exponenten der Wachstumskoeffizientenfunktion (69.4) war in Verbindung mit der vorliegenden Untersuchung wegen des grossen Rechenaufwands nicht möglich. Daher wurden mit dem Stammanalysenmaterial zu Beginn Berechnungen unter Anwendung von drei alternativen Exponenten, $c = 1$, $^2/_3$ und $^1/_2$ ohne Gewichtung (vgl. S. 71) ausgeführt. Auf Grund der Bestimmtheit (B) wurde die Wahl $c = {}^2/_3$ für den Exponenten als konstanter Näherungswert in der vorliegenden *Demonstration der Wachstumskoeffizientenfunktion* getroffen.

Die betreffenden Regressionsgleichungen wurden für die Probebäume der vier Probeflächen geschätzt, und zwar teils unmittelbar auf Grund der eigentlichen Wachstumskoeffizientenfunktion nach Gleichung (71.1) (Kuru A und Rovaniemi D), sowie teils als Funktion des Wachstums nach (72.2) (Kuru B und Kuru C)[1] Die Ergebnisse sind in Tabelle 96 angeführt, die den gleichen Aufbau wie die entsprechenden Teile der Tabellen für KOLLERs Funktion haben.

Der Wert des Parameters b, der in erster Linie für den Wachstumsrhythmus massgebend ist, variiert in ziemlich weiten Grenzen (0.2—1.2). Der Wert der Masstabsgrösse q liegt normal zwischen den Werten 0.9—1.0. Nur in drei Fällen ist er <0.9 und hat in zwei Fällen einen Wert >1. Letzterer wird nicht den Forderungen der theoretischen Funktionsform gerecht, da er bedeutet, dass das Wachstum keinen Zeitpunkt T des Alterstodes hat. Ein derartiges Ergebnis beruht bei den fraglichen Probebäumen auf den aussergewöhnlichen Beobachtungen ihrer ältesten Altersphasen. In diesen Fällen ist auch die Bestimmtheit besonders niedrig. Die

[1]) Die Möglichkeit kann ja bestehen, dass dieser Umstand einen systematischen Einfluss auf die Schätzungen ausgeübt hat. Deshalb wurde die Signifikanz der Unterschiede zwischen den Schätzungen nach beiden Berechnungsweisen einer Prüfung unterzogen. Die gefundenen Testwerte lassen zwar ein Vorkommen der besagten systematischen Verschiedenheit möglich erscheinen. Falls jedoch eine solche in der Tat existiert, scheint ihr Betrag auf alle Fälle ganz gering zu sein.

Tabelle 96. Schätzen mittels der Wachstumskoeffizientenfunktion
Stammanalysenmaterial

Gebiet	Probe-fläche	Schätzungen der Parameter entsprechend der Form der Gleichung (69.5): q	b	Bestimmtheit (B)	Vertrauens-koeffizient	Zeitpunkt T des Altertodes
		Wert der gesamten Probefläche			(Spannweite der einzelnen Probebäume)	
Kuru	A	0.939 (0.856 — 1.007)	0.648 (0.310 — 1.195)	0.844 (0.392 — 0.976)	(1.014 — 1.051)	116 (75 — 156)
	B	0.937 (0.879 — 0.951)	0.649 (0.557 — 1.109)	0.960 (0.985 — 0.999)	(1.007 — 1.184)	110 (78 — 136)
	C	0.953 (0.908 — 0.953)	0.642 (0.619 — 1.151)	0.954 (0.977 — 0.999)	(1.016 — 1.052)	170 (114 — 159)
Rovaniemi	D	0.963 (0.927 — 1.016)	0.559 (0.209 — 0.995)	0.791 (0.222 — 0.967)	(1.009 — 1.041)	201 (138 — 273)

Parameterschätzung $\hat{v}_1$ verdient in diesem Zusammenhang keine grössere Beachtung, da bei konstantem Exponent c die hierdurch bewirkte »Steifheit» der Funktion sich eben in ihr anhäuft (vgl. S. 72). Die Parameter q und b stehen miteinander *in recht engem Zusammenhang*, wie Bild 97 anschaulich erkennen lässt, und die betreffenden Testwerte zeigen, dass die Abhängigkeit in diesem Falle, wenn möglich, noch enger als bei der KOLLERschen Funktion ist.

Beim Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion wird die Bestimmtheit (B) im Vergleich mit der KOLLERschen Zuwachsfunktion auffallend niedrig. Beim gewichteten Schätzen ist die Bestimmtheit doch ein empfindlicher *Indikator der Homogenität* des Materials, indem die Abweichungen umso besser fühlbar sind, je grösser das betreffende Alter und je grösser zugleich der Betrag der absoluten Abweichung ist, welche sie vertreten. Die Vertrauenskoeffizienten[1] sind numerisch bedeutend klein. Man muss jedoch bemerken, dass sie sich auf das Wachstum oder diesem entsprechend auf die Wachstumskoeffizienten beziehen.

An Hand der T-Werte des Zeitpunkts des Alterstods in der Tabelle kann man schliessen, dass die Wachstumskoeffizientenfunktion bei Anwendung in der hier benutzten Form mit konstantem Exponenten c im allgemeinen zu niedrige Werte zu ergeben scheint. Hierzu gelten die gleichen Gesichtspunkte betreffs der Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials, die schon zuvor (S. 89) in Verbindung mit der KOLLERschen Funktion zur Rede kamen. Die Schätzungen geben den Probebäumen demnach auf den Probeflächen in Kuru hauptsächlich eine Lebensdauer zwischen 100 und 150 Jahren und auf der Probefläche Rovaniemi D durchschnittlich etwa 200 Jahre mit Extremwerten von 75 bzw. 270 Jahren. In Ausnahmefällen bei $q>1$ kann natürlich kein rechnerischer Wert von T ermittelt werden. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass bei Anwendung eines besser *geeigneten* Exponentwerts c die geschätzten Funktionen offenbar eine derartige Form erhalten hätten, dass der Grenzwert T *besser der Wirklichkeit* entsprechen würde. Es sei noch festgestellt, dass die Maximalphase des Zuwachses bei Anwendung der Wachstumskoeffizientenfunktion offensichtlich gut mit derjenigen bei der KOLLERschen Funktion übereinzustimmen scheint (vgl. auch Bild 94).

Die Residuale der Wachstumskoeffizientenfunktionen sind auf ihre Systematizität an Hand des Iterationstests (vgl. S. 89) geprüft worden. Diese Systematizität ist etwas häufiger

[1]) Die Vertrauenskoeffizienten in der Tabelle sind mit entsprechenden Grundlagen wie bei der KOLLERschen Funktion bestimmt worden. Jedoch wurde der t-Wert statt mit n-2 Freiheitsgraden als Approximation auf Grund des Gewichtsverhältnisses $(\sum w)^2 : \sum w^2$ bestimmt (vgl. HALD 1952, S. 441).

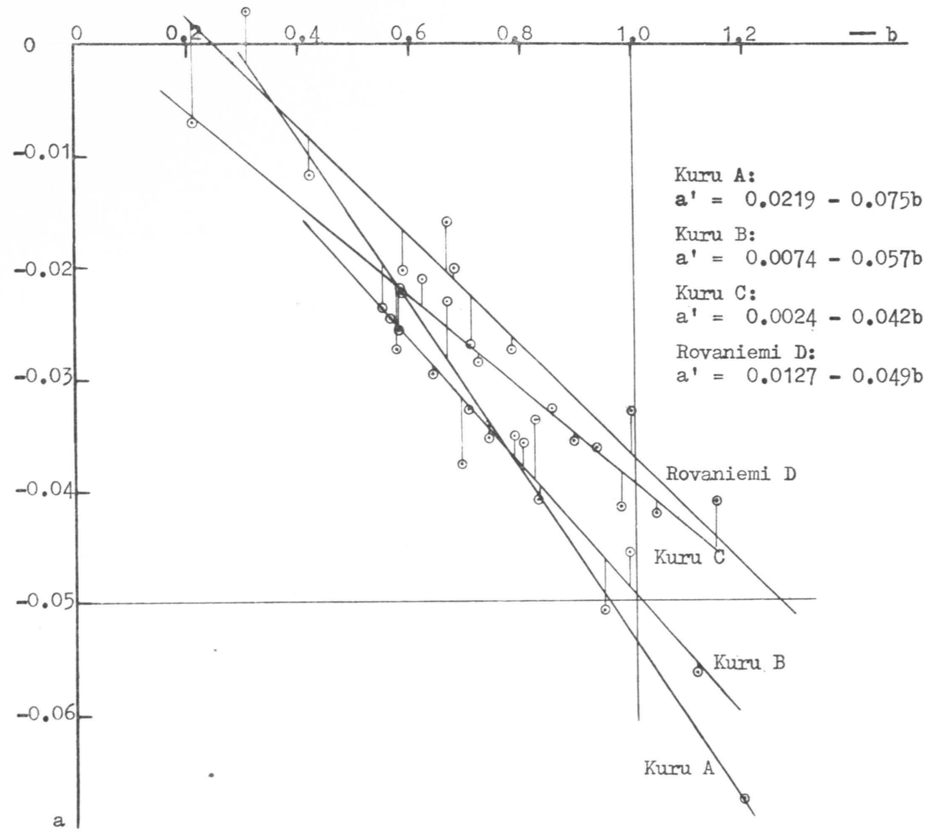


Bild 97. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Parametern a und b der Wachstumskoeffizientenfunktion
Stammanalysenmaterial

signifikant als im Zusammenhang der KOLLERschen Funktion, d.h. in 13 Fällen, also bei 35 % der Probebäume. Diese konzentrieren sich insbesondere auf eine der Probeflächen (Kuru C), während sie bei einer zweiten (Kuru B) überhaupt nicht auftreten. Es ist jedoch in diesem Zusammenhang nicht möglich zu ergründen, in welchem Mass der konstante Exponent c hierauf eingewirkt hat.

Die Analyse mit Benutzung der Wachstumskoeffizientenfunktion hat in erheblichem Mass darunter gelitten, dass der Exponent c nicht als einer der zu schätzenden Parameter behandelt werden konnte. Trotzdem ist es schon auf Grund der jetzt erhaltenen Ergebnisse offenbar, dass *die Wachstumskoeffizientenfunktion recht effektiv und zweckmässig beim Beschreiben des Wachstums verwertet werden kann.*

6103. Prüfung der Unterschiede zwischen den Wachstumsfunktionen

97. Die Prüfung der Unterschiede zwischen Wachstumsfunktionen auf ihre Signifikanz (vgl. S. 77) wird im Zusammenhang des Stammanalysenmaterials mittels der Kovarianzanalyse demonstriert. Als ein eigentliches Beispiel wird sie hierarchisch ausgeführt, wo Baumindividuen, Holzarten, Probeflächen, Gebiete und das ganze Material ihre verschiedenen Stufen

Tabelle 98. Hierarchische Kovarianzanalyse auf Grund der KOLLERschen Funktion (65.3)[1]
Stammanalysenmaterial

Art der Reststreuung	Kenn-zeichen	Grund-vari-anz	Zuschuss der erklärten Rest-streuung	Material von Kuru: Grund-streu-ung	Kuru: Signifikanz der Regressions-koeffizienten		Kuru: Signifikanz der Regressions-mittelwerte		Material von Rovaniemi: Grund-streu-ung	Rovaniemi: Signifikanz der Regressions-koeffizienten		Rovaniemi: Signifikanz der Regressions-mittelwerte	
				f	f	F	f	F	f	f	F	f	F
1. Streuung in den baumindividuellen Regressionen	B	s_b^2		386					525				
2. Streuung zwischen den *baumindividuellen* Regressionen													
a. Innerhalb der Holzarten: Regression auf Grund der Summe von *Baumindividuen*	B_h		B_h — B		46	9.29***				34	27.2***		
Regression auf Grund der *Holzarten*	H		H — B_h				23	25.2***				17	121***
b. Innerhalb der Probeflächen: Regression auf Grund der Summe von *Baumindividuen*	B_f		B_f — B		50	11.0**				40	30.9***		
Regression auf Grund der *Probeflächen*	F		F — B_f				25	23.5***				20	206***
3. Streuung zwischen den *holzartenweisen* Regressionen; Grundstreuung	H - B	s_h^2		69					51				
Regression auf Grund der Summe von Holzarten	H_s		H_s — H		4	1.97-				6	1.520-		
Regression auf Grund der Probeflächen	F		F — H_s				2	0.507-				3	10.5***
4. Streuung zwischen den *probeflächenweisen* Regressionen; Grundstreuung	F - H	s_{f1}^2		6					9				
	F - B	s_{f2}^2		75					60				
Regression auf Grund der Summe von Probeflächen	F_s		F_s — F		4	6.74*[2] 9.63**				4	0.413-[2] 1.224-		
Regression auf Grund der Gebiete	G		G — F_s				2	13.6***[2] 19.5***				2	11.0**[2] 32.6***
5. Streuung zwischen den *gebietsweisen* Regressionen			Das gesamte Material										
Grundstreuung	G - F	s_g^2		12									
Regression auf Grund der Summe von Gebieten	G_s		G_s — G		2	0.159-							
Totalregression	T		T — G_s				1	23.5***					

[1]) Abkürzungen: f = Zahl der Freiheitsgrade, F = Wert im F-Test mit Signifikanz.

[2]) Der obere F-Wert gründet sich auf Grundvarianz s_{f1}^2, der untere wiederum auf s_{2f}^2.

ausmachen. Zum Ausgangspunkt dieser Analyse (s. z.B. SNEDECOR 1957, S. 395) wurde hierbei die KOLLERsche Funktion (65.3) angewandt, da man in Verbindung mit ihr erwarten kann, dass die Reihenkorrelation zwischen Beobachtungen in den Messreihen am geringsten ausfällt. Bei der Analyse ist der Test auf der Beziehung der Varianzen zweier *aufeinanderfolgenden* Stufen, z.B. derjenigen von Gebieten und Probeflächen, begründet worden. Er zeigt dann in erster Linie an, ob im jeweiligen Fall die Unterschiede zwischen Gruppen einer Stufe (zwischen den Gebieten) den Betrag der Streuung im Vergleich zur Streuung der nächstunteren Stufe (der Probeflächen) signifikant vermehren (vgl. z.B. WEBER 1961, S. 187—189).

Tabelle 98 zeigt die Ergebnisse dieser *hierarchischen Kovarianzanalyse*. Die bemerkenswerteste Beobachtung beim Betrachten der Tabelle ist ohne Zweifel die Feststellung, dass die Signifikanz der *Unterschiede* zwischen den Regressionsmittelwerten, d.h. *im Niveau des Zuwachses*, fast ausnahmslos *grösser als* diejenige zwischen den Regressionskoeffizienten, d.h. *in seinem Rhythmus* ist. Dies weist darauf hin, dass im Wachstumsvorgang selbst, an sich ganz folgerichtig, immer unabhängig von den äusseren Verhältnissen ein gewisser einheitlicher Rhythmus vorhanden ist, so dass die Unterschiede in erster Linie unter den Niveauunterschieden der Wachstumsvorgänge zu finden sind.

Die Werte in der Tabelle lassen annehmen, dass sich die Unterschiede in einem Fall wie dem des Stammanalysematerials bei der Wachstumsanalyse auf Grund der Kovarianzanalyse *leicht ungewöhnlich signifikant* äussern. Da bei der KOLLERschen Funktion die Reststreuung recht gering ausfällt, bringt sie zugleich die Unterschiede empfindlich zum Vorschein. Es könnte deshalb zweckmässig sein, eine solche Umbildung der Testkriterien anzustreben, dass diese möglichst gut dem Sondercharakter des Wachstums von Bäumen angepasst wären. Es ist möglich, dass die üblichen Testnormen, zum Teil vielleicht auch infolge der Reihenkorrelation der Beobachtungen, in diesem Sinn nicht streng genug sind, um in zweckmässiger Weise die tatsächlichen Verschiedenheiten zum Ausdruck zu bringen.

Auf Grund des Demonstrationsmaterials scheint die Signifikanz der Unterschiede *zwischen den Holzarten geringer als sonst* auszufallen und sogar zum Teil ganz zu fehlen. Dies zeigt sich bei der Analyse darin, dass die Unterschiede zwischen den Holzarten im Vergleich zu den baumindividuellen gering bleiben, obgleich sie anderseits zwischen den Probeflächen im Vergleich zu ihren inneren holzartenweisen Unterschieden signifikant sind. Ein *Bestand* stellt auch demnach stets eine gewisse *Gesamtheit* dar, auch wenn er aus mehreren Holzarten bestehen sollte (vgl. auch weiter unten).

99. Als Beispiel einer zweiten Alternative wird im Folgenden die *Kovarianzanalyse in zwei Richtungen* vorgenommen (s. z.B. STEEL-TORREY 1960, S. 310), womit ein Begriff von den voneinander unabhängigen Wirkungen gewisser qualitativer Wachstumsfaktoren erhalten wird. In der Analyse, die auch auf Grund der KOLLERschen Funktion (65.3) ausgeführt wird, werden die Probeflächen Kuru A und Kuru B miteinander verglichen; beide haben ja einen Mischbestand von Kiefer und Fichte. Die Zufallsstreuung ist in dieser Analyse auf der baumindividuellen Streuung gegründet. Ihre Ergebnisse sind in folgender Zusammenstellung angegeben.

Doppelte Prüfung der Regressionsmittelwerte bei den Probeflächen Kuru A und Kuru B

Art der Streuung		Freiheits-grade	Wert im F-Test
Reststreuung		271	
Zwischen Holzarten	(= A)	3	4.69**
Zwischen Probeflächen	(= F)	3	4.08**
Wechselwirkung	(= A·F)	13	13.8***

Bemerkenswert ist, dass in diesem Falle die Zusammenwirkung beider Faktoren die grösste Signifikanz besitzt. Die Signifikanz der Unterschiede sowohl zwischen den Holzarten wie zwischen den Probeflächen für sich ist fast gleich und deutlich geringer als die erstgenannte.

Man kann dies so deuten, dass weder der Unterschied zwischen den Holzarten noch derjenige zwischen den Probeflächen an sich wesentlich ist, sondern der ausschlaggebende Faktor im Bestand ist die gemeinsame Wirkung dieser beiden, d.h. die Korrelation zwischen den Baumindividuen insofern, als *auf jedem Bestand die Holzarten sich in ihrem Wachstumsrhythmus einander anpassen.*

100₁. Die auf Grund des Demonstrationsmaterials gewonnenen Ergebnisse geben Hinweise darauf, dass es mittels der Kovarianzanalyse möglich ist zu beurteilen, wann es zweckmässiger ist, gewisse Wachstumsvorgänge voneinander getrennt zu beschreiben als sie unter einer gemeinsamen Wachstumsfunktion vereinigt anzuwenden. Wie sich im vorigen schon gezeigt hat, dürfte es jedoch angebracht sein, mittels geeigneter Grundforschung näher zu ermitteln, ob man dann vom Verwenden der üblichen Testnormen absehen und eine *eigene*, als Grundlage für diesartige Analysen zweckmässigere *Normenskala* ausarbeiten sollte.

100₂. Wenn die Unterschiede zwischen den Regressionskoeffizienten bedeutend sind, wirken sie in den verschiedenen Streuungskomponenten auf die Unterschiede der betreffenden Regressionsmittelwerte ein. Die Analyse betreffs derselben kann dann in der von LINDER (1960, S. 232—233) dargestellten Weise *mittels* ihrer *paarweisen Testung* nachgeprüft werden.

In diesem Sinne ist bezüglich der Probeflächen Kuru A und Rovaniemi D zuerst die Analyse der betreffenden Regressionsmittelwerte unter Anwendung des von LINDER (1960, S. 225—231) dargestellten Verfahrens ausgeführt worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 100 gezeigt. Die Werte im F-Test sind dabei in normaler Weise auf Grund der Zufallsstreuung s_e^2 bestimmt worden. Die Analyse ergibt also in diesem Falle, dass die Unterschiede zwischen allen Komponenten der Streuung sehr signifikant sind. Die Grössenunterschiede der Werte im F-Test bei den verschiedenen Komponenten vermitteln ihrerseits ein Bild davon, in welchem Mass die Streuung in jedem Fall von dem Niveau der reinen Zufallsvariation abweicht.

In dem Test betreffs der paarweisen (Indizes *i* und *j*) Gruppenmittelwerte werden zuerst die betreffenden Unterschiede korrigiert, indem man die Wirkung der entsprechenden unabhängigen Variablen auf Grund der Unterschiede ihrer eigenen Gruppenmittelwerte heranzieht. Hiernach werden sie mit dem Betrag der entsprechenderweise korrigierten Zufallsstreuung verglichen.

Das Korrigieren der Unterschiede der Gruppenmittelwerte erfolgt hier mittels der Gleichung

Tabelle 100. Kovarianzanalyse nach LINDER (1960, S. 225—231) ausgeführt
Stammanalysenmaterial

Streuungskomponenten		Freiheitsgrade	Restquadratsumme	Durchschnittsquadrat	Wert im F-Test
Zwischen Probeflächen	(= F)	1	1.245		
Zwischen Holzarten	(= A)	3	20.455		
Zwischen Baumindividuen	(= B)	11	1.207		
Zufallsvariation	(= E)	290	16.685	0.05754	
F + E		291	109.436		
A + E		293	41.635		
B + E		301	29.790		
F [= (F+E) — E]		1	92.751	92.751	*1612****
A		3	24.950	8.317	*144****
B		11	13.104	1.191	*20.7****

Tabelle 101. Prüfung der paarweisen Gruppenmittelwerte nach LINDER (1960, S. 232—233) ausgeführt
Stammanalysenmaterial

Mittelwerte und deren Differenzen	$\bar x_1$	$\bar x_2$	$\bar y$	n	s_e^2	d'_y	Wert im F-Test
Zwischen Probeflächen:							
Kuru A	42.323	1.5252	4.2852	187			
Rovaniemi D	59.687	1.6695	3.3404	182			
$D_K - D_R$	−17.364	−0.1443	+0.9448		0.00097	+1.1800	*1442****
Zwischen Holzarten:							
Kuru A							
Kiefer	43.642	1.5346	4.3276	67			
Fichte	40.850	1.5147	4.2378	60			
$D_{Ki} - D_{Fi}$	+2.792	+0.0199	+0.0898		0.00182	+0.0610	*2.039-*
Rovaniemi D							
Kiefer	61.380	1.6791	3.6540	71			
Fichte	62.000	1.6831	2.7652	48			
Birke	56.016	1.6484	3.4252	63			
$D_{Ki} - D_{Fi}$	−0.620	−0.0040	+0.8888		0.00201	+0.8943	*439****
$D_{Ki} - D_{Bi}$	+5.364	+0.0307	+0.2288		0.00175	+0.1932	*21.3****
$D_{Fi} - D_{Bi}$	+5.984	+0.0347	−0.6600		0.00215	−0.7010	*229****

(101.1) $$d'_y = (\bar y_i - \bar y_j) - b_1(\bar x_{1i} - \bar x_{1j}) - b_2(\bar x_{2i} - \bar x_{2j})$$

Als Ausgangspunkt für den Bezugswert der Zufallsstreuung wiederum ist der Wert s_e^2 in Tabelle 100 benutzt worden, aus dem zum Prüfen eines jeden Unterschieds die folgende Testgrösse bestimmt worden ist.

(101.2) $$s'^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{(\bar x_{1i} - \bar x_{1j})^2}{\sum x_1x_1} + \frac{2(\bar x_{1i} - \bar x_{1j})(\bar x_{2i} - \bar x_{2j})}{\sum x_1x_2} + \frac{(\bar x_{2i} - \bar x_{2j})^2}{\sum x_2x_2}\right)$$

Hierin bedeuten die Quadrat- und Kovarianzsummen die betreffenden, mit der Bestimmung von s_e^2 verknüpften Produktesummen. Im F-Test ist der Testwert selbst das Verhältnis

(101.3) $$F = (d'_y)^2 : s'^2 \qquad f: 1{,}133$$

Die Ergebnisse dieses Tests sind in Tabelle 101 dargestellt. Die Werte im F-Test sind in der Regel sehr signifikant und stimmen recht gut mit den betreffenden, in Tabelle 100 angeführten Werten überein. Es ist nämlich zu beachten, dass in erster Linie diese, da sie beide auf der Zufallsstreuung s_e^2 basieren, miteinander vergleichbar sind. Die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der Probeflächen sind somit sehr signifikant, und das gleiche ist auch betreffs der Unterschiede zwischen den Holzarten bei der Probefläche Rovaniemi D festzustellen. Dort ist der Unterschied zwischen Kiefer und Birke den beiden anderen deutlich unterlegen. Dagegen hat der Unterschied zwischen den Holzarten bei der Probefläche Kuru A überhaupt keine Signifikanz, indem selbst die Prüfgrenze $F_{0.05} = 3.9$ bedeutend höher ist. In dieser Beziehung kann man voraussetzen, dass auch allgemeiner *beträchtliche Verschiedenheit unter Beständen* vorkommt. Ihre Art und die Regelmässigkeit ihres Vorkommens müsste durch eine besondere Untersuchung geklärt werden.

101. Die Kovarianzanalyse ist im Vorstehenden auf Grund der KOLLERschen Funktion ausgeführt worden. Die entsprechende *Varianzanalyse der Residuale* (s. S. 78—79) wird in diesem Zusammenhang auf Grund der Wachstumskoeffizientenfunktion demonstriert, da sich

Tabelle 102. Varianzanalyse der Residuale der baumindividuellen Regressionsgleichungen mit Gewichtung
Stammanalysenmaterial

Streuungs-komponenten	Anzahl	Frei-heits-grade	Quadrat-summe	Durch-schnitts-quadrat
Mittelwert		1		
Zwischen Probeflächen	2	1	3.5037	3.5037 = A
Zwischen Holzarten	5	3	5.9063	1.9688 = B
Zwischen Baumindividuen	16	11	4.5162	0.4106 = C
Zwischen Messpunkten	307	291	11.0376	0.0379 = D
Zwischen Gewichtseinheiten	30615	30308	0	0

damit einige ***mit der Gewichtung*** der Beobachtungen verknüpfte Gesichtspunkte beleuchten lassen. In dieser Verbindung verdient auch Beachtung, was zuvor (vgl. S. 12) betreffs des stochastischen Charakters der Beobachtungsreihe vom baumindividuellen Material angeführt wurde.

Da das Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktionen mit Gewichtung ausgeführt wurde, muss dieser Sachverhalt auch bei der Analyse ihrer Residuale berücksichtigt werden. Hierbei wird ein Vorgehen angewandt werden, das auf einem von GRAYBILL (1961, S. 354—357) für ein unbalanciertes Material dargelegten Prinzip begründet worden ist. Diese Analyse bezieht sich nur auf die Probeflächen Kuru A und Rovaniemi D, und ihre Ergebnisse sind in Tabelle 102 dargestellt.

Als Ausgangspunkt der Analyse galt für die Darstellung der Residuale die Gleichung

(102.1) $$\Delta y_{fabmw} = \overline{\Delta y} + a_f + b_a + c_b + d_m + e_w$$

worin $\overline{\Delta y}$ ihren Mittelwert und die a_f, b_a, c_b, d_m und e_w die Abweichungen von diesem Mittelwert bezüglich der Probeflächen, Holzarten, Baumindividuen, einzelner Messpunkte bzw. der Gewichtseinheiten bezeichnen. Man ist beim Berücksichtigen der Gewichtung von der Voraussetzung ausgegangen, dass in der Analyse ein jedes Messergebnis ***eine Menge gleichgrosser Beobachtungen*** vertritt, die der Zahl seiner Gewichtseinheiten entspricht. So ergibt sich für die Komponente e_w in allen Fällen der Wert = 0 und somit ebenfalls der Betrag $s_e^2 = 0$.

Insofern die Residuale dem Prinzip der Regressionsanalyse (vgl. S. 78) gemäss als voneinander unabhängige Zufallsvariablen vorausgesetzt werden können, setzt sich deren Varianz aus der Summe der Varianzen ihrer verschiedenen Komponenten zusammen:

(102.2) $$s_{\Delta y}^2 = s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + s_d^2 + s_e^2$$

In Anlehnung an das von GRAYBILL befolgte Vorgehen sind in der Varianzanalyse die Formeln für die verschiedenen Komponenten der Streuung hergeleitet worden. Die numerischen Gleichungen in Tabelle 102 gründen sich auf diese, und auf Grund der numerischen Gleichungen sind ferner die Schätzungen für s_a^2, s_b^2, s_c^2 und s_d^2 bestimmt worden.

Will man die Signifikanz der verschiedenen Streuungskomponenten betrachten, so kann man die Beobachtungen von untereinander gleicher Gewichtung, die mit $\bar{w}$ bezeichnet wird, zur Grundlage zu setzen. Für den Zweck des Vergleichs können dabei als Approximationsvorgehen die Hilfsgrössen in Tabelle 102 bestimmt werden, die den Werten A, B, C und D in der Tabelle entsprechen (vgl. GRAYBILL, op.c., Tab. 16.5 auf S. 352).

Gleichungen für die Streuungen	Streuung	Hilfsgrösse
$s_e^2 + 215\, s_d^2 + 2236\, s_c^2 + 6076\, s_b^2 + 11542\, s_a^2$	$s_a^2 = 0.000089$	A' = 0.037606 $\bar{w}$
$s_e^2 + 182\, s_d^2 + 1591\, s_c^2 + 4911\, s_b^2$	$s_b^2 = 0.000330$	B' = 0.023951 $\bar{w}$
$s_e^2 + 217\, s_d^2 + 1879\, s_c^2$	$s_c^2 = 0{,}000169$	C' = 0.003669 $\bar{w}$
$s_e^2 + 88\, s_d^2$	$s_d^2 = 0.000429$	D' = 0.000429 $\bar{w}$
s_e^2	$s_e^2 = 0$	

Der Vergleich kann dann mittels diesen vorgenommen werden. Auf Grund des F-Test kann man erstens bezüglich der baumindividuellen Streuung feststellen, dass das Verhältnis C':D' = *8.55**** (*f:* 11,291) sehr signifikant ist, d.h. sie ist bedeutend grösser als diejenige zwischen den verschiedenen Messpunkten bei ein und demselben Baumindividuum. Die Streuung zwischen den Probeflächen bzw. Holzarten lässt sich wiederum am besten mit derjenigen der baumindividuellen vergleichen. Hierbei werden die Verhältnisse B':C' = *6.53*** (*f:* 3,11) und A':C' = *10.25*** (*f:* 1,11) signifikant. Sowohl die Streuung *zwischen den Probeflächen als auch* diejenige zwischen *den Holzarten* ist somit *deutlich grösser als* die *der Baumindividuen.* Wenn man noch das Verhältnis A':B' ins Auge fasst, so liegt der von diesem ermittelte Wert *1.570*⁻ (*f:* 1,3) weit unter der Grenze $F_{0.05}$ (= *10.1*). Der Unterschied zwischen den betreffenden Probeflächen hat somit *keine Signifikanz* auf Grund der *holzartenweisen* Streuung.

6104. Prüfung der Unterschiede zwischen den Parametern

103. Ein jeder Parameter der Zufallsfunktion ist eine unabhängige Zufallsvariable, aber *zwischen* verschiedenen *Parametern* einer Zufallsfunktion bestehen gewisse *Abhängigkeitsbeziehungen* (vgl. S. 26). Durch *Analysieren dieser Beziehungen* in ihren verschiedenen Realisierungen, d.h. den Wachstumsfunktionen, kann man möglicherweise auch Aufschluss über die Bedeutung der Unterschiede zwischen ihnen erhalten (vgl. PRODAN 1961, S. 378). Im folgenden wird diese Frage eingehender auf Grund der Parameter der KOLLERschen Funktion (65.3) demonstriert, um deren eventuelle Bedeutung für die Wachstumsanalyse zu veranschaulichen. Wenn auch dabei alle Parameter auf Grund sowohl der Korrelationswerte als auch der Kovarianzanalyse betrachtet werden, besteht selbstverständlich ein prinzipieller Unterschied bezüglich ihres Wesens, aber das Problem wird somit vielseitiger beleuchtet. Auch dem Umstand, dass das Beobachtungsmaterial nicht in allen seinen Teilen der KOLLERschen Funktion ihre richtige Form erteilt, dürfte man keine wesentliche Wirkung zuschreiben können. Auf jeden Fall bestehen die gegebenen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen ihren Parametern, und die Funktionen geben den Verlauf des Wachstumsvorgangs im Rahmen des Beobachtungsmaterials selbst richtig wieder (vgl. S. 89).

In Tabelle 104 sind Schätzungen der *Korrelationskoeffizienten* zwischen den Parametern aufgeführt. Die echten Abhängigkeitsbeziehungen gehen aus ihren partiellen Koeffizienten

(s. z.B. WEBER 1961, S. 284–287) hervor. Wie man sieht, sind dieselben *sämtlich negativ*, was ja ihrem Wesen ganz entspricht. *Ihre hohen Werte* zeigen ihrerseits die grosse Bedeutung der Abhängigkeit zwischen den Parametern im Aufbau der Wachstumsfunktion an. Besonders interessant ist auch der Umstand, dass die (in Klammern mit aufgenommenen) Koeffizientenwerte der Parameter der bedingten KOLLERschen Funktion (66.2) bei den Probeflächen Rovaniemi E und Rovaniemi F *nahezu feste* Korrelation anzeigen, welchen Umstand man seinesteils als Hinweis auf die Brauchbarkeit der bedingten Funktionen ansehen kann.

Bezüglich der ursprünglichen Korrelationskoeffizienten der Tabelle kann man feststellen, dass unter ihnen der Koeffizient $r_{b_1b_2}$, der regelmässig einen negativen Wert hat, *am wenigsten streut*. Auch r_{b_2a} ist stets negativ, streut aber mehr als der vorerwähnte. Von diesen *abweichend* variiert der Koeffizient r_{b_1a}, und zwar teils positiv, teils negativ, ausgiebig. Im Lichte der partiellen Korrelationskoeffizienten scheint es offenbar, dass der Parameter b_2 $(= m)$ *am ausschlaggebendsten* sowohl auf den Verlauf der Funktion selbst als auch auf den Masstabsfaktor q einwirkt, und dass der Parameter b_1 $(= -k)$ in dieser Beziehung gewissermassen eine untergeordnete Stellung einnimmt. Hierauf beruht auch, dass der Koeffizient r_{b_1a} mit solcher Empfindlichkeit in den verschiedenen Fällen, im Grunde also nur scheinbar, variiert.

Aus Tabelle 105, die den Zweck hat, die Art der *Variation in der Abhängigkeit* zwischen den Parametern zu veranschaulichen, gehen in der Hauptsache die gleichen Züge hervor, die bereits im Vorstehenden zutage traten. Insbesondere gibt der geringe Regressionseinfluss des Parameters b_1 auf den Parameter a seine *untergeordnete* Stellung im Vergleich zum Parameter b_2 zu erkennen. Aus denjenigen Werten im F-Test, die den vom Parameter b_1 mitgeführten Zuschuss an Signifikanz in der Beziehung $(b_1+b_2) \rightarrow a$ anzeigen, ist anschaulich zu erkennen, dass er in Wirklihkeit jedoch *nicht bedeutungslos* ist.

Tabelle 104. Schätzungen der Korrelationskoeffizienten zwischen den Parametern der KOLLERschen Funktion (65.3)
Stammanalysenmaterial

Probefläche bzw. Gebiet	Einfache Korrelationskoeffizienten				Partielle Korrelationskoeffizienten			
	f[1]	r_{b1b2}	r_{b1a}	r_{b2a}	f[1]	r_{b1b2}	r_{b1a}	r_{b2a}
Kuru A	6	−0.665	+0.459	−0.894	5	−0.640	−0.405	−0.887
B	10	−0.835	+0.625	−0.947	9	−0.970	−0.939	−0.990
C	6	−0.902	+0.818	−0.982	5	−0.904	−0.822	−0.982
Kuru im Ganzen	26	−0.618	+0.324	−0.911	25	−0.828	−0.738	−0.956
Rovaniemi D	6	−0.776	+0.133	−0.677	5	−0.940	−0.845	−0.918
E	5	−0.749 (−0.300)	−0.130 (−0.149)	−0.438 (−0.898)	4	−0.904 (−0.999)	−0.769 (−0.999)	−0.814 (−1.000)
F	6	−0.680 (−0.946)	−0.425 (+0.866)	−0.360 (−0.981)	5	−0.985 (−1.000)	−0.978 (−1.000)	−0.976 (−1.000)
Rovaniemi im Ganzen	21	−0.739	−0.111	−0.339	20	−0.830	−0.570	−0.629
Totalkorrelation des Materials	49	−0.779	+0.056	−0.553	48	−0.900	−0.720	−0.815

[1]) f = Freiheitsgrade

Tabelle 105. Regressionsbeziehungen der Parameter der KOLLERschen Funktion (65.3)
Stammanalysenmaterial

Beobachtungsmaterial		Regressionsbeziehung (unabhängige → abhängige Variable)								
		$b_1 \rightarrow b_2$			$b_1 \rightarrow a$	$b_2 \rightarrow a$	$(b_1 + b_2) \rightarrow a$			
Gebiet	Probefläche	Bestimmtheit (B)	F-Test ihrer Signifikanz		Bestimmtheit (B) und ihre Signifikanz			F-Test der Signifikanz		
								Von b_1 gewonnener Zuschuss	Von b_2 gewonnener Zuschuss	Freiheitsgrade
			Wert	f				Wert im F-Test		f
Kuru	A	0.442	4.75-	1,6	0.210-	0.799**	0.832*	18.5**	0.98-	1,5
	B	0.697	23.0***	1,10	0.390*	0.897***	0.988***	442***	67.0***	1,9
	C	0.813	26.1**	1,6	0.670*	0.946***	0.988***	140***	10.6*	1,5
Gesamtes Gebiet		0.381	16.0***	1,26	0.105-	0.830***	0.923***	264***	29.9***	1,25
Rovaniemi	D	0.603	9.10*	1,6	0.018-	0.458-	0.845**	26.6**	12.4*	1,5
	E	0.561	6.38-	1,5	0.017-	0.191-	0.669-	7.88*	5.77-	1,4
	F	0.462	5.16-	1,6	0.180-	0.129-	0.962***	102***	109***	1,5
Gesamtes Gebiet		0.546	25.2***	1,21	0.012-	0.115-	0.158-	3.45-	1.02-	1,20
Gesamtes Material		0.608	75.9***	1,49	0.003-	0.306***	0.666***	93.1***	50.5***	1,48

105. Sowohl in den für die Gebiete zuständigen Korrelationskoeffizienten als auch in denjenigen des gesamten Materials, die ungefähr der gleichen Grössenordnung wie auch die probeflächenweisen Koeffizienten sind, kommt in Tabelle 104 eine gewisse Einheitlichkeit in der Korrelation der Parameter zum Vorschein. Die Ergebnisse der *Kovarianzanalyse* in Tabelle 106 zeigen jedoch, dass auch den probeflächen- und gebietsweisen Unterschieden offenbar in dieser Hinsicht Bedeutung zukommt. Diese kommt allerdings bei weitem nicht so signifikant zum Vorschein, wie vorher im Zusammenhang mit der Kovarianzanalyse der Wachtumsfunktionen selbst *(Dem.B. 100₁)*. Dieser Umstand kann vom Standpunkt der Wachstumsanalyse auch seine eigenen Vorteile haben, da man dadurch vielleicht leichter die betreffenden Beziehungen gegenseitig auf ihre Bedeutung beurteilen kann. In den Ergebnissen der Tabelle zeigt sich der *gleiche Grundzug* wie auch in denjenigen der Wachstumsfunktionen selbst, indem die Unterschiede im Niveau des Wachstumsvorgangs signifikanter als diejenigen in seinem Rhythmus sind. Doch weist die Signifikanz der Unterschiede zwischen Mittelwerten der Parameter b_1 auf das Vorhandensein der populationsweisen Unterschiede auch in der Wachstumsgeschwindigkeit.

Die oben aufgeführten Testergebnisse deuten an, dass sich für die Beurteilung der Unterschiede zwischen verschiedenen Wachstumsfunktionen *wertvolle Ausgangspunkte* auch *durch Analysieren der Abhängigkeitsbeziehungen zwischen ihren Parametern* finden lassen. Jedoch kann erst auf Grund eines umfangreicheren Materials Aufschluss darüber verschafft werden, wie die auf ihnen basierende Analyse am effektivsten und zweckmässigsten erfolgen soll. Erst dann können die in Frage kommenden Signifikanzkriterien formuliert werden, nach welchen die Unterschiede zwischen den Wachstumsfunktionen bei Anwendung dieses Ausgangspunkts zu beurteilen sind.

Tabelle 106. Kovarianzanalyse der Parameter der KOLLERschen Funktion (65.3)
Stammanalysenmaterial

Art der Streuung	Kennzeichen	Regressionsbeziehung (unabhängige → abhängige Variable): $b_2 \rightarrow b_1$ — Material aus Kuru: f	F	Material aus Rovaniemi: f	F	$(b_1 + b_2) \rightarrow a$ — Material aus Kuru: f	F	Material aus Rovaniemi: f	F
		f = *Freiheitsgrade*, F = *Wert im F-Test*							
Summe der probeflächenweisen Regressionen (→ Grundvarianz s_f^2)	F	22		17		19		14	
Regression auf Grund der Summe der Probeflächen	F_s	24		19		23		18	
Zuschuss (= Unterschied zwischen den Regressions*koeffizienten*)	F_s — F	2	*1.29-*	2	*1.76-*	4	*2.33-*	4	*4.68**
Summe der gebietsweisen Regressionen (→ Grundvarianz s_g^2)	G	26		21		25		20	
Zuschuss (= Unterschied zwischen den Regressions*mittelwerten*)	G — F_s	2	*5.39**	2	*3.10-*	2	*9.71***	2	*13.0****
		Das gesamte Material							
(→ Gebietsweise Grundvarianz s_j^2)	G — F	8				12			
Regression auf Grund der Summe der Gebiete	G_s	48				47			
Zuschuss (= Unterschied zwischen den Regressions*koeffizienten*)	G_s — G	1	*0.44-*			2	*0.75-*		
Totalregression	T	49				48			
Zuschuss (= Unterschied zwischen den Regressions*mittelwerten*)	T — G_s	1	*6.28**			1	*4.76**		

62. BESTÄNDE BETREFFENDES DEMONSTRATIONSMATERIAL

621. Beschaffenheit des Materials

An Hand des Stammanalysenmaterials wurde im Vorstehenden besonders danach gestrebt, einerseits die allgemeine Eignung einiger Funktionsformen zur Wachstumsanalyse zu beleuchten sowie anderseits den Aufbau der bestandesweisen Wachstumsfunktionen aus den baumindividuellen zu veranschaulichen. Das unmittelbar auf Messungen an Beständen basierende Demonstrationsmaterial stellt hierzu eine Ergänzung dar, insbesondere da es infolge seines Bestehens aus temporärem Probeflächenmaterial in stochastischem Sinn der Unabhängigkeitsbedingung restlos genügt. Besondere Bedeutung hat es als Mittel zur Demonstration der Analyse der übrigen Wachstumsfaktoren und der Verfahren, die beim Berücksichtigen derselben anzuwenden sind.

Im Schrifttum liegt auch einheimisches, hierzu brauchbares Material vor. Besonders eignet sich zu einem solchen Zweck dasjenige Material, welches in Verbindung mit verschiedenen Untersuchungen über die Struktur von Holzbeständen beschafft worden ist. Von solchen sind zum Demonstrationsmaterial in der vorliegenden Arbeit die in Verbindung mit den Untersuchungen von NYYSSÖNEN (1954) und VUOKILA (1956) veröffentlichten Daten ihrer Probeflächenmessungen genommen worden. Sie repräsentieren ja eine Bestandsart, die noch lange Zeit hindurch eine *Grundlage unserer Forstwirtschaft* darstellen wird.

Beide Untersuchungen beziehen sich auf natürlich entstandene, aber wiederholt mit Hieben behandelte Bestände der eigentlichen Wirtschaftswälder, und in ihrem Rahmen spiegelt sich also wenigstens annähernd die Entwicklung der *regelmässigen* Bestandsstruktur wider. Man kann auch annehmen, dass sie vom Standpunkt der Wachstumsanalyse ein in seiner Beschaffenheit brauchbares Untersuchungsmaterial vertreten.

Material anderer Art hinsichtlich der Wachstumsanalyse hat man aus der Untersuchung von HEIKURAINEN (1959) über Waldentwässerungsgebiete hinzugenommen, die eigentlich zu anderen Zwecken gemacht worden ist. Sie enthält aber auch primäre Daten, bei denen es möglich ist, sie zur Anwendung der Wachstumsanalyse zu verwerten. Dieses Material erfüllt eigentlich nicht die Forderungen, die man hinsichtlich seiner Erhebungsweise betreffs des Zuwachses im kritischen Sinn stellen muss, und infolge der Beschaffenheit seines Forschungsobjekts ist es überdies recht inhomogen und weitspannig (vgl. op.c., S. 79). Es ist jedoch als Abbild einer gewissen Art *abweichender* Bestände recht interessant und eignet sich daher vorzüglich als Demonstrationsmaterial beim Versuch, die Schwierigkeiten und anderseits die Möglichkeiten zu beleuchten, die sich zur Anwendung der mathematisch-statistischen Methoden in der Wachstumsanalyse bei einem heterogenen Material darbieten.

622. Das Kiefernmaterial von Nyyssönen

6221. Beschreibung des Materials

NYYSSÖNEN (1954) hat sein Material in den südlichen Teilen Finnlands gesammelt. Er hatte als eigentliches Ziel, ein möglichst repräsentatives Material solcher gleichaltrigen Bestände zu erhalten, die wiederholt behandelt worden sind. Sein Material umfasst 190 Probeflächen vom *Myrtillus-*, *Vaccinium-* und *Calluna-*Typ (s. Tab. 108). Bezüglich des Bestandsalters verteilt sich das Material des *Vaccinium-*Typs ziemlich gleichmässig, während dasjenige des *Myrtillus-*Typs vorwiegend jüngere und des *Calluna-*Typs ältere Bestände hat (op.c., S. 44). Die Altersbestimmungen gründen sich auf Bohrungen am Stammende (op.c., S. 38).

Besondere Beachtung ist im Material der Behandlung der Bestände zugewandt worden. Auf dieser Grundlage ist es in fünf *Behandlungsklassen* eingeteilt worden (op.c., S. 23—24):

A. Mittels Durchforstung behandelte Bestände
  1. Wiederholt durchforstete Bestände
  2. Mit Lichtung durchforstete Bestände

B. In unbestimmbarer Weise behandelte Bestände

C. Durch Plentern behandelte Bestände
  1. Wiederholt geplenterte Bestände
  2. Geplenterte Bestände, die in Ruhe gelassen sind.

Den Hauptteil des Materials bilden die Bestände der Klasse A_1, und reichlich kommen auch Bestände aus Klasse C_1 vor (op.c., S. 43).

Bei den Messungen an den Probeflächen ist auch der *Abgang* während der Messungsperiode mit seinem Zuwachs berücksichtigt worden (op.c., S. 109—110). Auch wurden die Ergebnisse der Zuwachsmessungen mittels Zuwachsindizes in Korrektur gebracht (op.c., S. 45). Auf Grund der in der Untersuchung angegebenen Messdaten konnten zum Zweck der vorliegenden Arbeit die rindenfreie Masse des Bestands zu Beginn der Messperiode (von 5 oder häufiger 10 Jahren) konstruiert werden.

Auf Grund des Materials von NYYSSÖNEN ist also ein gutes Allgemeinbild vom Wachstumsvorgang der mit Hieben behandelten Kiefernbestände in der südlichen Hälfte des Landes erhältlich. Das Material ist somit vom Standpunkt der Methodik der Wachstumsanalyse, besonders bezüglich der *qualitativen Variation*, ausgezeichnet brauchbar.

Tabelle 108. Schätzungen der bestandesweisen Regressionsgleichungen bei der KOLLERschen Funktion
Kiefern- und Fichtenmaterial

Material	Waldtyp	Behandlungsklasse	Probeflächen	Funktion[1]	Parameterwerte a	Parameterwerte b_1	Parameterwerte b_2	Maximalphase der Funktion (Jahre)	Bestimmtheit (B)	Vertrauenskoeffizient
Kiefer (NYYSSÖNEN 1954)	*MT*	A_1–C_2	42	E	+5.074	−0.0027	−0.742	..	0.588	1.077
				S	+1.255	−0.0197	+0.452	23	0.547	
		A_1	27	E	+2.734	−0.0143	+0.038	3	0.801	1.065
				S	+0.154	−0.0255	+0.842	33	0.776	
				N	−2.466	−0.0367	+1.646	45		
	VT	A_1–C_2	96	E	+4.525	−0.0025	−0.648	..	0.467	1.059
				S	+0.506	−0.0219	+0.635	29	0.413	
		A_1	50	E	+1.321	−0.0158	+0.369	23	0.618	1.057
				S	−1.026	−0.0286	+1.143	40	0.577	
		C_1	20	E	+1.799	−0.0159	+0.145	9	0.516	1.119
				S	−1.105	−0.0286	+1.143	40	0.513	
				N	−3.562	−0.0414	+1.917	46		
	CT	A_1–C_2	52	E	+3.020	−0.0044	−0.356	..	0.226	1.085
				S	−0.046	−0.0108	+0.452	42	0.161	
		A_1	19	E	+0.222	−0.0077	+0.393	51	0.148	1.067
				S	−1.295	−0.0124	+0.826	67	0.120	
		C_1	13	E	+5.186	+0.0072	−1.131	..	0.063	1.125
				S	+0.908	−0.0049	+0.065	13	0.058	
				N	−2.958	−0.0171	+1.260	74		
Fichte (VUOKILA 1956)	*OMT*		65	E	−2.492	−0.0303	+1.630	54	0.553	1.069
	MT		54	E	−5.314	−0.0409	+2.442	60	0.680	1.094

[1]) E = auf der eigentlichen KOLLERschen Funktion (65.3),
N = auf den Ertragstafeln von ILVESSALO (1920, S. 28—33) für naturnormale Bestände und
S = auf Ausgleichung unter Benutzung der letztgenannten als Stützfunktion basierende Werte.

6222. *Schätzen der Grundfunktion*

108. Für das Kiefernmaterial sind die *Schätzungsergebnisse der* KOLLER*schen Funktion* (126.2) in Tabelle 108 mit der Kennzeichnung E auf Grund sowohl des gesamten Materials als ferner gesondert der Behandlungsklassen A_1 und C_1 eingetragen, die letzteren getrennt, weil NYYSSÖNEN seine Untersuchungsergebnisse auf sie bezogen hat.

Unter den geschätzten Funktionen in der Tabelle kann höchstens diejenige bei der Behandlungsklasse A_1 auf *CT* in ihrem Verlauf als annähernd normal angesehen werden, obgleich auch hier die Maximalphase offenbar bedeutend zeitiger als in Wirklichkeit liegt. In den übrigen Fällen ist, wie man an den Werten und Vorzeichen des Parameters $b_2(=m)$ sieht, ihr Verlauf nicht mit dem tatsächlichen Wachstumsvorgang übereinstimmend. Beim Vergleich der Parameterschätzungen der Probebäume in Tabelle 86 sieht man, dass sie im Kiefern-

material sowohl hinsichtlich ihres Vorzeichens als auch ihrer Grössenordnung von diesen *stark abweichen.* Indessen sollten sie mit ihnen im grossen ganzen übereinstimmen, was in der Tat bei dem Fichtenmaterial von VUOKILA der Fall ist.

Die Ursachen für ein solches Ergebnis gehen offenbar auf die Altersverteilung des Kiefernmaterials zurück. Hier kommt sehr typisch der Fall zum Ausdruck, dass infolge der Verteilung der Beobachtungen die *Phasenzeitpunkte* der zu schätzenden Funktion *nicht* in genügendem Grad *lokalisiert werden* (vgl. S. 65). Bei jedem Waldtyp entsprechen die Schätzungen der Behandlungsklasse A_1 am besten dem Verlauf der Zuwachsfunktion, und allgemein betrachtet sind in einem jeden Typ die Ergebnisse auch in der Behandlungsklasse C_1 mehr »normal» als die des gesamten Materials. Es ist demnach offenbar, dass die *Heterogenität* des Materials einen *merkbaren Einfluss* auf die Schätzung der betreffenden Funktion hat. Wenn ihre Phasenpunkte richtige Lokalisierung finden, entspricht der Verlauf der Funktion *auch in* seinen *übrigen* Teilen, so auch vom Standpunkt der Extrapolation, wenigstens befriedigend dem tatsächlichen Wachstumsvorgang (vgl. S. 30).

Bezüglich der Effektivität der Schätzungen ist festzustellen, dass die Bestimmtheit (B) bei dem *bestandsweisen* Material bedeutend *kleiner* als bei dem baumindividuellen ist, was man im Hinblick auf die Beschaffenheit der beiden (vgl. S. 12) auch als natürlich ansehen kann. Die Vertrauenskoeffizienten zeigen, dass die Ergebnisse im allgemeinen innerhalb eines Vertrauensbereiches von $\pm$ 5—10 % liegen.

109. Um eine Vorstellung von der Bedeutung einer geeigneten Stützfunktion (vgl. S. 41) beim Ausgleichen eines unvollkommenen Materials zu gewinnen, hat neben dem oben besprochenen *Schätzen* auch ein entsprechendes Vorgehen *mit Hilfe der Stützfunktion* stattgefunden. Da sich als solche ohne Zweifel eine die naturnormalen Bestände betreffende Funktion eignet, wurden auf Grund der Ertragstafeln von ILVESSALO (1920, S. 28—33) Funktionen geschätzt, deren Parameterwerte ebenfalls (mit N bezeichnet) in Tabelle 108 aufgenommen worden sind. Unter Anwendung dieser mit der Gewichtung im Verhältnis 1:1 sind anschliessend die Schätzungen gewonnen worden, die in der Tabelle mit S bezeichnet sind.

Wie man sieht, hat das Einführen der *Stützfunktion den Verlauf* der Funktionsschätzungen *bedeutend verbessert.* Sogar im ungünstigsten Fall (Behandlungsklasse C_1 von *CT*) haben die

Tabelle 109. Schätzungen der bestandesweisen Regressionsgleichungen bei der Wachstumskoeffizientenfunktion (70.2)
Kiefernmaterial

Waldtyp	Behandlungsklasse	Wert der Parameter q	Wert der Parameter b	Zeitpunkt des Alterstodes (T)	Bestimmtheit (B)	Vertrauenskoeffizient
MT	A_1 – C_2	0.837	0.628	145	0.850	1.026
VT		0.956	0.634	187	0.763	1.023
CT		0.947	0.769	183	0.679	1.026
MT	A_1	0.947	0.627	138	0.888	1.031
VT		0.947	0.671	151	0.884	1.024
CT		0.925	0.972	154	0.860	1.045
MT	C_1	0.977 (0.959)	0.494 (0.618)	352 (200)	0.584	1.130
VT		0.982 (0.954)	0.499 (0.706)	506 (200)	0.441	1.062
CT		1.028 (0.955)	0.002 (0.690)	.. (200)	0.000	1.039

Werte ihrer Parameter richtiges Vorzeichen, obwohl der Einfluss des ungleichmässig verteilten Materials hiermit nicht ganz zum Verschwinden gebracht worden ist. Ihre Maximalphase liegt regelmässig zeitiger als bei naturnormalen Beständen. Obgleich dies u.U. dem als richtig zu erachtenden Sachverhalt entsprechen kann, erscheint es zum Teil noch unwirklich zeitig. Die Werte der Bestimmtheiten lassen erkennen, dass der Betrag der Reststreuung *nicht wesentlich grösser* als auch beim Schätzen mittels der eigentlichen KOLLERschen Funktion ist. Es ist somit möglich, insbesondere in Aufgaben der Praxis, eine Stützfunktion zum Sicherstellen eines richtigen Verlaufs der Wachstumsfunktion zweckmässig heranzuziehen.

110. In den die *Wachstumskoeffizientenfunktion betreffenden Anwendungen* des Kiefernmaterials wird als Schätzgleichung die Form (70.2) benutzt, weil es Messperioden von sowohl 5 als auch 10 Jahren enthielt. Zur Erörterung, ob ein solches Vereinigen in Bezug auf die Ergebnisse Bedeutung hat, liegt in diesem Zusammenhang kein Grund vor, da es sich um eine rein methodologische Demonstration handelt. Das Schätzen des Wachstumskoeffizienten erfolgte nach dem Prinzip der Gleichungsform (52.4). Folglich stellen die betreffenden Wachstumskoeffizientenfunktionen nicht eigentlich ein Bild vom Wachstumsvorgang des Bestandes dar; dafür geben sie einen Ausgangspunkt ausdrücklich für praktische Prognosenberechnungen.

Die der Tabelle 108 entsprechenden Schätzungen finden sich in Tabelle 109. Im Gegensatz zum Sachverhalt bei der KOLLERschen Funktion kann unter ihren Parameterwerten eine gewisse Übereinstimmung wahrgenommen werden, die *ihresteils andeutet, dass die Wachstumskoeffizientenfunktion* zu ihrem Zweck *brauchbar ist.* Ferner kann man beobachten, dass auch zwischen beiden Parameterwerten der Schätzungen des bestandsweisen Materials eine *ebenso enge Abhängigkeit* wie bei den baumindividuellen Ergebnissen besteht (vgl. Bild 110). Im Vergleich mit den letzteren in Tabelle 96 stimmen die bestandsweisen Schätzungen des Parameters q ziemlich gut mit diesen überein. Dagegen ist in den Werten des Parameters b ein deutlicher Unterschied zwischen beiden Ergebnissen festzustellen, indem sie bestandsweise erheblich kleiner als baumindividuell erscheinen. Der Grund für einen solchen Unterschied liegt ja im gänzlich verschiedenen Ausgangspunkt der beiden, so dass der Wachstumskoeffizient auch dann selbstverständlich grundverschiedene Natur hat.

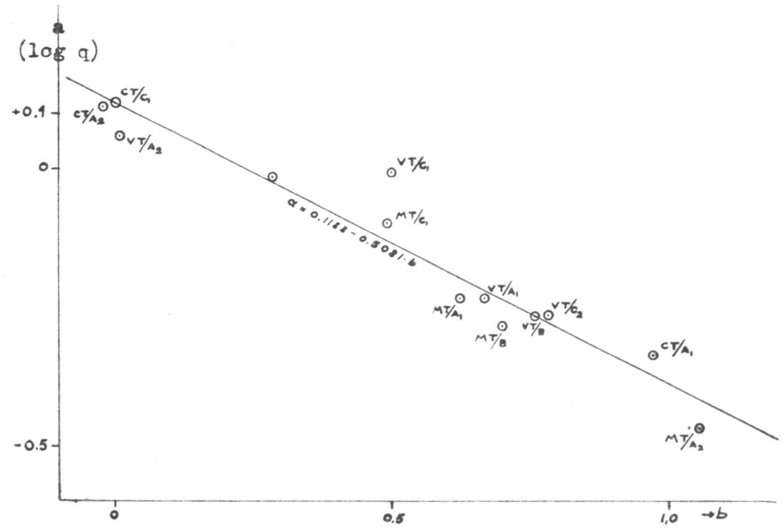


Bild 110. Gegenseitige Abhängigkeit der Parameter a und b der Wachstumskoeffizientenfunktion (70.2)
Kiefernmaterial

Die Werte insbesondere in der Behandlungsklasse A_1 für den Zeitpunkt des Alterstods (T), d.h. des Gesamtalters der Bestände, *stimmen* in den verschiedenen Typen *gut überein.* Offenbar ist auch die von ihnen angezeigte Altersphase der Wahrheit wenigstens insofern nahe, als der Betrag des Zuwachses nach derselben ziemlich bedeutungslos ist. In der Behandlungsklasse C_1 ist dagegen auch der Wert von T aussergewöhnlich, was in erster Linie die *Heterogenität* des Materials in dieser Klasse wiedergibt. Die Struktur der wiederholt geplenterten Bestände kann ja in verschiedenen Fällen sogar stark verschieden sein, was natürlich auch in ihren Zuwachsbeträgen zutage tritt. Als Beispiel der Anwendungsmöglichkeiten der Gleichung (71.7) sind bezüglich des Materials der Klasse C_1 in Tabelle 109 auch die *Schätzungen mit dem Wert $T = 200$ Jahre* angeführt worden. Wie man sieht, werden damit die betreffenden Parameterwerte mit denjenigen der übrigen Klassen *übereinstimmend.*

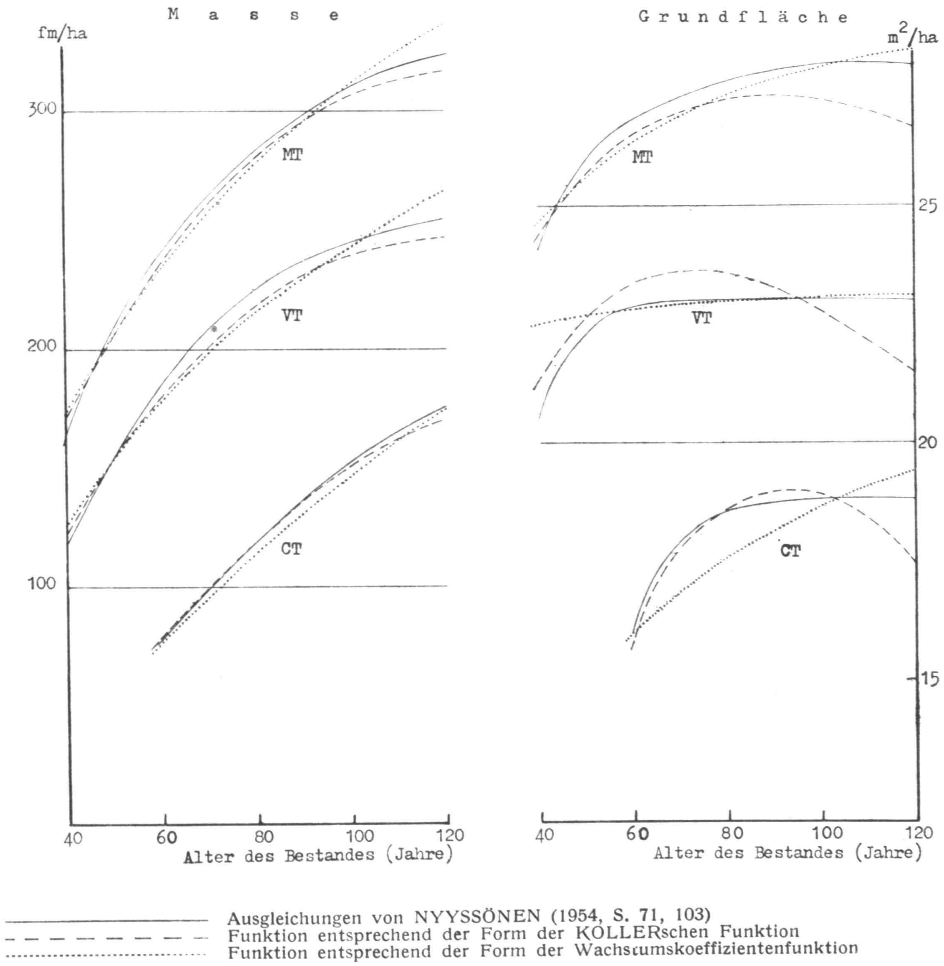


Bild 111. Vergleich einiger Ausgleichungskurven der Masse und der Grundfläche
Kiefernmaterial, Behandlungsklasse A_1

Die Ergebnisse aus dem Kiefernmaterial weisen darauf hin, dass *sich die Wachstumskoeffizientenfunktion gut beim bestandesweisen Material eignet.* Falls dasselbe wenigstens leidlich homogen ist, gewinnt man schon hiermit ein brauchbares Ergebnis, insbesondere wenn es überdies möglich ist, den geeigneten Exponenten c aufzusuchen. Falls wiederum die Inhomogenität des Materials Verfälschung bewirkt, dann kann man die Funktion an einen festen Wert von T binden und dadurch auch in diesen Fällen die Brauchbarkeit der Ergebnisse sicherstellen. Den möglichst gut der Wirklichkeit entsprechenden Wert von T kann man auf anderem Weg mit hinreichender Genauigkeit veranschlagen.

6223. Berücksichtigung der Wirkung übriger Wachstumsfaktoren

112. Als sekundäre zusätzliche Veränderliche wurden bei dem Kiefernmaterial die *Masse* sowie auch die *Grundfläche* (beide mit Rinde) verwendet. Erstere fällt formal richtiger dem Zuwachs entsprechend mit der Mitte der Messperiode zusammen. Von letzterer stehen hingegen nur die ihrem Endzeitpunkt entsprechenden Daten zur Verfügung und dabei im Hinblick auf die Homogenität des Materials nur die Daten der Messperioden von 10 Jahren. Dieses abweichende Vorgehen hat natürlich seinen eigenen Einfluss auf die Ergebnisse.

Um eine Vorstellung davon erhalten zu können, in welchem Mass die betreffenden Wachstumsfaktoren in ihrer Abhängigkeit vom Bestandsalter *funktional* der Form der beiden angewandten *Wachstumsfunktionen entsprechen*, ist das Ausgleichen mit dem Material der Behandlungsklasse A_I an Hand einer Funktion gleicher Form vorgenommen worden. Die so erzielten Werte sind in Bild 111 mit den Ergebnissen der graphischen Ausgleichung von NYYSSÖNEN selbst verglichen.

Man kann auf Grund dieses Vergleichs feststellen, dass die *Anpassung der betreffenden Wachstumsfaktoren* an die beiden Funktionsformen zumindest als *befriedigend* gelten kann. Die Vertrauenskoeffizienten stimmen typenweise untereinander überein. Sie variieren betreffs der Masse zwischen 1,054 und 1,080 und betreffs der Grundfläche auf etwas niedrigerem Niveau, zwischen 1,042 und 1,070. Der charakteristische Unterschied zwischen denselben kommt besonders gut darin zum Ausdruck, dass bei der Form der KOLLERschen Funktion eine Maximalphase vorkommt, derzufolge ihre Werte im Spätalter bereits zurückgehen. Die Form der Wachstumskoeffizientenfunktion hingegen steigt monoton zu einem gewissen Höchstwert

Tabelle 112. Masse und Grundfläche als zusätzliche Veränderliche bei der KOLLERschen Funktion (65.3)
Kiefernmaterial

Zusätzliche Veränderliche	Waldtyp	Schätzungen der Parameter: Hauptveränderliche b_{x1}	Schätzungen der Parameter: Hauptveränderliche b_{x2}	Zusätzl. Veränderl. b_z	Bestimmtheit (B)	Vertrauenskoeffizient	Wert im F-Test der Signifikanz der zusätzl. Veränderl.
Masse (z_V)	*MT*	−0.00118	−0.742	–	0.588	1.077	
		−0.00358	−0.754	+0.615	0.865	1.044	*25.6****
	VT	−0.00110	−0.648	–	0.467	1.059	
		−0.00044	−0.907	+0.425	0.720	1.043	*83.4****
	CT	−0.00192	−0.356	–	0.226	1.085	
		+0.01091	−3.190	+0.711	0.642	1.058	*56.0****
Grundfläche (z_G)	*MT*	−0.00536	−0.254	–	0.614	1.075	
		−0.01104	+0.544	+0.606	0.801	1.054	*30.0****
	VT	−0.00499	−0.0126	–	0.577	1.055	
		−0.00463	+0.0004	+0.644	0.765	1.041	*57.6****
	CT	+0.00008	−0.740	–	0.307	1.084	
		+0.01670	−3.726	+1.026	0.643	1.061	*34.0****

Tabelle 113. Masse und Grundfläche als zusätzliche Veränderliche bei der Wachstumskoeffizientenfunktion (70.2)
Kiefernmaterial

Zusätzliche Veränderliche	Waldtyp	Schätzungen der Parameter: Hauptveränderl. b_x	Schätzungen der Parameter: Zusätzl. Veränderl. b_z	Bestimmtheit (B)	Vertrauenskoeffizient	Wert im F-Test der Signifikanz der zusätzl. Veränderl.
Masse (z_V)	*MT*	0.628	–	0.850	1.026	
		0.542	−0.155	0.919	1.020	*33.2****
	VT	0.634	–	0.763	1.023	
		0.582	−0.137	0.841	1.019	*45.0****
	CT	0.769	–	0.679	1.026	
		0.685	−0.148	0.763	1.023	*12.8****
Grundfläche (z_G)	*MT*	0.634	–	0.835	1.029	
		0.649	−0.181	0.881	1.025	*12.9***
	VT	0.668	–	0.832	1.023	
		0.689	−0.205	0.874	1.020	*18.6****
	CT	0.791	–	0.707	1.032	
		0.843	−0.198	0.766	1.029	*9.30***

an. Es bedarf der Klärung, welche der beiden in Wirtschaftswäldern besser der Wirklichkeit entsprechen mag. Im Ganzen kann man jedoch davon ausgehen, dass die Wirkung beider Wachstumsfaktoren mit der Form der angewandten Wachstumsfunktionen *effektiv* hervorgebracht werden kann.

113. Die Ergebnisse des Schätzens mit einigen seine Effektivität charakterisierenden Kennwerten, indem die *zusätzliche Veränderliche in gleichzeitiger Regression* mit der Hauptveränderlichen einbezogen ist, sind in Tabelle 112 und 113 aufgenommen, welche zum Vergleich nebeneinander die Parameter der Schätzungen mit und ohne zusätzliche Veränderliche enthalten.

Die Verwendung zusätzlicher Veränderlicher scheint auf Grund des F-Tests (s. S. 74) sowohl in Zusammenhang mit der KOLLERschen Funktion als auch mit der Wachstumskoeffizientenfunktion den Betrag der *Reststreuung* merklich *herabzusetzen.* Dies ist der Fall sowohl dann, wenn die Grundfläche, als auch, und zwar besonders, wenn die Masse als solche angewandt wird. Der mit letzterer gewonnene Zuschuss an Erklärung ist regelmässig deutlich, wenngleich nicht sehr viel grösser als der mit der Grundfläche erzielte.

Dagegen kann man feststellen, dass das Mitaufnehmen der zusätzlichen Veränderlichen in der Regression *keineswegs die Form* der KOLLERschen Funktion *verbessert* hat. In dieser Beziehung hat es also keinen Nutzen gebracht. Der Regressionskoeffizient der zusätzlichen Veränderlichen ist aber immer *positiv*, und dies bedeutet, dass der Betrag des Zuwachses in dem gleichen Alter umso grösser ist, je grösser die Masse bzw. die Grundfläche ist, wie es folgerichtig auch sein muss.

Dem Wesen der Wachstumskoeffizientenfunktion zufolge hat die zusätzliche Veränderliche, wie aus Tabelle 113 hervorgeht, nicht sonderlich auf den Wert ihrer Parameter b eingewirkt: mit der Masse ist ihr Wert etwas kleiner und mit der Grundfläche etwas grösser als in der Regression mit der Hauptveränderlichen allein. Das Vorzeichen des Regressionskoeffizienten der zusätzlichen Veränderlichen ist bei dieser Funktionsform *negativ*, d.h. der Wachstumskoeffizient ist in ein und demselben Alter umso kleiner, je grösser die Masse bzw. die Grundfläche ist, was abermals folgerichtig ist.

114₁. Zur Demonstration *der phasenweisen Regressionsanalyse* (s. S. 75) ist beim Kiefernmaterial als zusätzliche Veränderliche in der zweiten Phase nur die besser geeignete *Masse* (in diesem Fall ohne Rinde) betrachtet worden. Das Schätzen wurde auf Grund der Residuale der Wachstumskoeffizientenfunktion dem den beiden Gleichungsformen (55.2) und (56.2) entsprechenden Prinzip gemäss vorgenommen. Als *erste Phase* wurde hierbei für die Hauptveränderlichenfunktion die Regressionsgleichung der Behandlungsklasse A_1 (vgl. Tabelle 109) benutzt, während laut dieser die Residuale des gesamten Beobachtungsmaterials die Ausgangswerte der zweiten Phase (Δy_x) gebildet haben. Das *Standardniveau* der Masse wurde ebenfalls nur auf das Material der Behandlungsklasse A_1 begründet, da dieses am besten ein Bild von ihrer regelmässigen Entwicklung gibt (vgl. S. 76).

Der von der Masse erklärte Anteil der Residuale und seine Signifikanz [vgl. Gleichung (77.1)] sind aus folgender Zusammenstellung ersichtlich.

	Erklärende zusätzliche Veränderliche						
	Masse ($=z_V$)			Massenabweichung ($\Delta z_V = z_V - \mathbf{z}_V$)			z_V und Δz_V zusammen
Waldtyp	Bestimmtheit	Freiheitsgrade	Wert im F-Test	Bestimmtheit	Freiheitsgrade	Wert im F-Test	Bestimmtheit
	B	f	F	B	f	F	B
MT	0.267	38	*13.8****	0.344	36	*18.9****	0.347
VT	0.274	92	*34.8****	0.331	90	*44.6****	0.333
CT	0.122	48	*6.67**	0.345	46	*24.2****	0.357

Der Unterschied zwischen beiden Alternativen einer zusätzlichen Veränderlichen ist in diesem Fall deutlich. Das auf den *Abweichungen* ($z_V - \mathbf{z}_V$) der zusätzlichen Veränderlichen basierende Vorgehen in der zweiten Phase liefert ein deutlich *besseres* Ergebnis als dasjenige auf Grund des Werts von z_V selbst. Dagegen verbessert gleichzeitiges Einbeziehen dieser beiden das Erklärungsvermögen des Modells nicht weiter. Dies weist darauf hin, dass die Wirkung der Abweichungen (in der Tat der Massenverhältnisse) von dem Betrag der Bestandesmasse *unabhängig* ist.

114₂. Es ist interressant, die *Effektivität der* einerseits bei gleichzeitigem Schätzen und anderseits beim phasenweisen Vorgehen erzielten *Ergebnisse* untereinander zu *vergleichen*. Da der erstere Fall einem Regressionsmodell der Form (56.2) entspricht, sind in erster Linie mit den Ergebnissen in der Tabelle 113 diejenigen des phasenweisen Schätzens vergleichbar, die sich auf die Massenabweichungen ($z_V - \mathbf{z}_V$) gründen.

In der folgenden Aufstellung sind die Bestimmtheiten (B) der beiden Schätzvorgehen einander gegenübergestellt. Bei dem phasenweisen Vorgehen wird ja die Reststreuung der letzten Phase die endgültige Reststreuung sein.

Waldtyp	Bestimmtheit (B) in unmittelbarer Regression	Bestimmtheit (B) in phasenweiser Regression	Wert im F-Test auf Grund des Verhältnisses der Restvarianzen
MT	0.919	0.902	*1.318*-
VT	0.841	0.840	*1.035*-
CT	0.763	0.759	*1.083*-

Wie man sieht, führen beide Verfahren *zu* ziemlich *gleichem Resultat*. Der Unterschied zwischen ihnen ist bei allen Typen übereinstimmend geringfügig und hat somit keinerlei Signifikanz, wie die Werte im auf dem Verhältnis der Restvarianzen basierenden F-Test in der

Aufstellung anschaulich zeigen (vgl. S. 91). Es erscheint also möglich, dass man auch dann zu einem *brauchbaren* Endergebnis gelangen kann, wenn man einen *Ausgangspunkt mit nur einem Teil des eigentlichen Materials* in gewissen Phasen des Schätzens benutzt.

Da auf die zusätzliche Veränderliche in diesem Fall ein Regressionsmodell mit gleicher Form wie das der Hauptveränderlichen verwendet wurde, bietet sich auch die Möglichkeit, die Gleichungsform (75.4) heranzuziehen. In der folgenden Aufstellung werden in der logarithmischen Form die Schätzungen der Regressionsgleichungen verglichen.

Waldtyp	Art der Berücksichtigung der zusätzlichen Veränderlichen	Schätzung der Regressionsgleichung
MT	gleichzeitig	$\hat{y} = +\,0.0183 + 0.5421x - 0.155z_V$
	phasenweise	$\hat{y} = +\,0.0190 + 0.5292x - 0.154z_V$
VT	gleichzeitig	$\hat{y} = +\,0.0134 + 0.5822x - 0.137z_V$
	phasenweise	$\hat{y} = +\,0.0136 + 0.5730x - 0.135z_V$
CT	gleichzeitig	$\hat{y} = +\,0.0103 + 0.6852x - 0.148z_V$
	phasenweise	$\hat{y} = +\,0.0111 + 0.7306x - 0.163z_V$

Bei allen Typen sind die Schätzergebnisse in bemerkenswertem Mass *übereinstimmend*. Es ist wahrscheinlich, dass der Unterschied zwischen den Regressionskoeffizienten nicht einmal bezüglich des *CT* Signifikanz besitzt. In dem soeben durchgeführten Vergleich kommt also das Gleiche zum Ausdruck, wie schon zuvor in Verbindung mit der Interpretation der Bestimmtheit.

6224. Prüfung der Unterschiede zwischen den Wachstumsfunktionen

115. Das Analysieren der qualitativen Variation im Kiefernmaterial mittels *Kovarianzanalyse* ist auf Grund der Wachstumskoeffizientenfunktion (70.2) ausgeführt worden, indem das von LINDER (1960, S. 130—138) dargestellte, *für ein ungleichmässiges Material* beabsichtigte Ver-

Tabelle 115. Kovarianzanalyse bezüglich der Klassenmittelwerte nach LINDER (1960, S. 225—233) ausgeführt
Kiefernmaterial

Streuungskomponenten		Restquadratsumme	Freiheitsgrade	Durchschnittsquadrat	Wert im F-Test
Zwischen Waldtypen	(= T)	0.0075	1		
Zwischen Behandlungsklassen	(= B)	0.0242	3		
Wechselwirkung	(= T·B)	0.0458	7		
Restvariation	(= R)	0.2803	174	0.00163	
T + R		0.3431	176		
B + R		0.3181	178		
T·B + R		0.3338	182		
Differenz D_2:					
T (= (T+R) − R)		0.0628	2	0.03138	*19.5****
B		0.0378	4	0.00945	*5.87****
T·B		0.0535	8	0.00669	*4.15****
Differenz D_3:					
T		0.0553	1	0.05525	*34.3****
B		0.0136	1	0.01359	*8.44***
T·B		0.0077	1	0.00772	*4.79**

fahren in geeigneter Weise angewandt wurde. Als Ausgangspunkt diente hierbei der Aufbau der Variablen x und y der Funktion (70.2)

(116.1) $$x = \bar{x}_{..} + \Delta x_{i.} + \Delta x_{.j} \quad \text{und} \quad y = \bar{y}_{..} + \Delta y_{i.} + \Delta y_{.j} \, ,$$

worin $\bar{x}_{..}$ und $\bar{y}_{..}$ die Mittelwerte des gesamten Materials sowie Δx und Δy die Abweichungen der Typen (mit Index i) und der Behandlungsklassen (mit Index j) bedeuten. Das Schätzen der betreffenden Abweichungen Δx und Δy für einen jeden Typ und für eine jede Behandlungsklasse ist mittels des von LINDER (op.c., S. 119—126) dargestellten Iterationsverfahrens durch Ausgleich ausgeführt und anschliessend die entsprechenden Mittelwertschätzungen $\bar{x}_{i.}$, $\bar{y}_{i.}$ bzw. $\bar{x}_{.j}$, $\bar{y}_{.j}$ bestimmt worden. Die erforderlichen verbesserten Quadrat- und Produktsummen sind dann einfach an Hand der betreffenden Anzahl der Beobachtungen $n_{i.}$ bzw. $n_{.j}$ berechnet worden. Hiernach wird die Kovarianzanalyse in der von LINDER (op.c., S. 225—233) angegebenen Form fortgeführt.

Die Ergebnisse der Analyse sind in Tabelle 115 dargestellt. Da in dem Material auch die Variation der unabhängigen Variablen x sowohl bei den verschiedenen Waldtypen als auch in den verschiedenen Behandlungsklassen signifikant verschieden ist, muss der hieraus erwachsende Einfluss in der Analyse in Rücksicht gezogen werden. Die Differenz D_3 gibt Signifikanz des Unterschieds an, der sich zwischen den Klassen der abhängigen Variablen y einerseits und innerhalb derselben andererseits ergibt. Sie erweist, dass diese Unterschiede zwischen den Waldtypen stark signifikant und auch zwischen den Behandlungsklassen signifikant sind. Demzufolge ist die Differenz D_2, die die Signifikanz der Unterschiede zwischen den Klassenmittelwerten $\bar{y}_{i.}$ bzw. $\bar{y}_{.j}$ ausdrückt, *nicht an sich eindeutig* auslegbar. Da jedoch die D_2-Differenzen in der Analyse sämtlich stark gesichert sind, könnte man trotz der Unterschiede zwischen den Regressionskoeffizienten vermuten, dass auch diese Unterschiede in der Tat signifikant wären.

Dies kann gesondert zwischen den Waldtypen und zwischen den Behandlungsklassen paarweise geprüft werden, indem man den Einfluss der Regressionskoeffizienten auf die Regressionsmittelwerte eliminiert (vgl. *Dem.B.* 100_2). Für die betreffenden Unterschiede werden bei f:1,175 Freiheitsgraden die folgenden Signifikanzen gefunden:

	Wert im F-Test		Wert im F-Test
$\bar{y}_{MT} - \bar{y}_{VT}$:	21.9^{***}	$\bar{y}_{A1} - \bar{y}_{A2}$:	2.194^{-}
$\bar{y}_{VT} - \bar{y}_{CT}$:	8.84^{**}	$\bar{y}_{A1} - \bar{y}_{B}$:	0.384^{-}
		$\bar{y}_{A1} - \bar{y}_{C1}$:	22.8^{***}
		$\bar{y}_{C1} - \bar{y}_{C2}$:	2.797^{-}

Tabelle 116. Indexschätzungen des *Kiefernmaterials*

Waldtyp →	Ursprüngliche Indexwerte *MT*	*VT*	*CT*	Gesamte Klasse	Ausgeglichene Indexwerte *MT*	*VT*	*CT*	Gesamte Klasse Multipl.	LINDER
Behandlungs-klasse									
A_1	0.917	0.965	1.079	0.973	0.921	0.987	1.016	0.979	0.979
A_2	0.949	1.000	1.025	0.999	0.935	1.002	1.031	0.994	0.996
B	0.917	1.031	1.020	1.003	0.938	1.006	1.035	0.998	0.998
C_1	1.024	1.093	1.042	1.066	0.994	1.065	1.096	1.057	1.058
C_2	0.981	1.046	0.944	1.014	0.946	1.013	1.043	1.006	1.005
Gesamter Typ	0.933	1.007	1.043	(1.000)	0.940	1.008	1.037	(1.000)	(1.000)
				LINDER	0.940	1.007	1.037	(1.000)	

Zwischen den Waldtypen bestehen somit *zumindest signifikante* Unterschiede, während dagegen von denjenigen zwischen den Behandlungsklassen nur $y_{A1} - y_{C1}$ Signifikanz besitzt, die somit bei den Unterschieden zwischen den Behandlungsklassen *deutlich geringer* als zwischen den Waldtypen bleibt.

6225. Bemessung der qualitativen Variation

117₁. Bei dem Kiefernmaterial ist es möglich, die *Ausgleichung der Indexwerte in zwei Richtungen* auszuführen (s. S. 80—81). In Tabelle 116 sind die auf der Wachstumskoeffizientenfunktion basierenden Indexwerte der von einem jeden Waldtyp und einer jeden Behandlungsklasse gebildeten Kombination aufgeführt. Mit den ursprünglichen, unverbesserten Werten im linken Teil der Tabelle als Ausgangswerte sind unter Befolgung der Gleichung (81.3) neue, verbesserte Werte für die Waldtypen und für die Behandlungsklassen im Ausgleich ermittelt worden, und als deren Produkte wurden weiter die betreffenden Werte für eine jede Klassenkombination erhalten. Diese sind ihrerseits im rechten Teil der Tabelle angegeben. Als Gewichtung wurde beim Schätzen die Anzahl der Beobachtungen benutzt. Die erzielten Werte lassen *deutlich den Einfluss des Ausgleichens* erkennen. Noch sind der Tabelle die unter Anwendung von LINDERS (1960, S. 119—126) additivem Verfahren gewonnenen klassenweisen Indizes beigefügt worden. Wie man sieht, sind die Unterschiede zwischen beiden sehr gering.

117₂. Die unter Anwendung der Wachstumskoeffizientenfunktion (70.2) erhaltenen Ergebnisse, die mit Hilfe des auf dem Kiefernmaterial beruhenden Ausgleichs der gesamten Regressionsgleichung (s. S. 82—83) gewonnen wurden, sind in Tabelle 117 zu sehen, die die verbesserten Schätzungen der Parameter a und b und zum Vergleich ferner in Klammern die ursprünglichen Schätzungen des letzteren angibt. Hierbei sind die Gleichungen des Korrektionsfaktors $\log c$ hinsichtlich der Gleichung der Totalregression

$$\hat{y} = 0.574 \; x - 0.161 \; ,$$

und schliesslich gibt man die von diesen ergebenen Indexwerte (= Korrektionsfaktor c) für gewisse Bestandesalter an.

Die Ergebnisse kann man in diesem Fall als sehr gelungen ansehen, und die *Verhältnisse* zwischen den verschiedenen Klassen muten in den verbesserten Ergebnissen *wahrheitsgemäss* an. Es ist natürlich, dass eine Einwirkung der Beschaffenheit des Materials auch nach dem Aus-

Tabelle 117.

Werte der Parameter der ausgeglichenen Wachstumskoeffizientenfunktionen und einige auf Grund deren bestimmte Indexwerte
Kiefernmaterial

Klassen der qualitativen Variablen		Ausgeglichene (unverbesserte) Parameterwerte a	b	Korrektions-gleichung $\log c_i$	Indexwerte für Bestandesalter von 20 J	50 J	80 J	110 J
Waldtypen:	*MT*	−0.203	0.597 (0.628)	$0.022x - 0.0042$	0.998	0.994	0.993	0.993
	VT	−0.194	0.633 (0.634)	$0.059x - 0.0032$	1.012	1.003	1.000	0.999
	CT	−0.207	0.699 (0.769)	$0.125x - 0.0046$	1.030	1.011	1.005	1.002
Behandlungs-klassen:	A_1	−0.189	0.604 (0.611)	$0.030x - 0.0027$	1.003	0.999	0.997	0.997
	A_2	−0.063	0.369 (0.310)	$-0.205x + 0.0099$	0.936	0.965	0.975	0.980
	B	−0.188	0.617 (0.610)	$0.043x - 0.0027$	1.008	1.001	0.999	0.998
	C_1	−0.093	0.496 (0.542)	$-0.079x + 0.0069$	0.990	1.002	1.006	1.008
	C_2	−0.224	0.688 (0.798)	$0.113x - 0.0062$	1.023	1.005	1.000	0.997

gleichen besteht. In diesem Fall kann man sie beispielsweise in der Behandlungsklasse A_2 wahrnehmen, deren Material offenbar in seinem Aufbau inhomogen und überdies mengenmässig recht gering geblieben ist.

623. Das Fichtenmaterial von Vuokila

6231. Beschreibung des Materials

VUOKILA (1956) hat sein Material, das die Entwicklung natürlich entstandener, aber mit Hieben behandelter Fichtenbestände vertritt, in etwas südlicherer Gegend gesammelt als NYYSSÖNEN. Obwohl das Ziel VUOKILAs Untersuchung weitgehend mit dem von NYYSSÖNEN übereinstimmt, hat schon allein der Unterschied in der Holzart dem Material sein eigenes Gepräge verliehen. Der Anteil fremder Holzarten ist in den ersteren in der Regel *grösser*, und der reine Bestand hat folglich in den beiden Materialen einen verschiedenen Charakter. Der wesentlichste ist zweifellos verschiedene Natur der Gleichaltrigkeit (vgl. op.c., S. 25). Fernerhin benutzt VUOKILA ein *wirtschaftliches Alter*, indem zum Alter in Brusthöhe auf allen Probeflächen bei einem jeden Typ ein und dieselbe Anzahl von Jahren hinzugefügt worden ist (13 bzw. 16 Jahre bei *OMT* bzw. *MT)*.

VUOKILA befolgt das Prinzip, solche Waldbestände im Material einzubeziehen, die zumindest seit Passieren der Brusthöhe unter Verhältnissen *rationellen Waldbaus* gewachsen sind (op.c., S. 23), ohne die Materialwahl auf Grund eines gewissen Durchforstungsgrads oder irgendeines entsprechenden Kriteriums einzuschränken.

Die Zahl der Probeflächen bei VUOKILA beträgt 119, davon 65 vom *Oxalis-Myrtillus*- und 54 vom *Myrtillus*-Typ, und sie verteilen sich ziemlich gleichmässig auf den Altersbereich zwischen 20 und 100 Jahren. Jedoch liegen vom *MT* ältere Bestände in relativ geringer Zahl vor. Die Probeflächen mit junger Bestockung sind im Fichtenmaterial reichlicher als im Kiefernmaterial vertreten, und der Einfluss dieses Umstands tritt auch in den Demonstrationsbeispielen deutlich hervor.

Auch bei VUOKILA ist der Zuwachs des Abgangs in den angegebenen Zuwachsbeträgen, die mit dem Zuwachsindex korrigiert sind, enthalten, und auch bei ihm kommen Messperioden sowohl von 5 als auch von 10 Jahren vor. Der vorwiegende Teil der Probeflächen von jüngerem Alter ist erstgenannter Art und somit relativ reichlicher als im Kiefernmaterial. Die Angaben über die Masse beziehen sich bei VUOKILA auf das Ende der Messperiode.

6232. Schätzen der Grundfunktion

118. Beim Fichtenmaterial lassen sich nur *Schätzungen der* KOLLER*schen Funktion* (65.3) ausführen; diese sind aus Tabelle 108 ersichtlich. *Im Gegensatz* zu dem Kiefernmaterial kann man sie als *brauchbar* erachten. Ihr Verlauf ist völlig normal, und ihre Parameterwerte stimmen mit den baumindividuellen Werten in Tabelle 86 überein. Obgleich die Beschaffenheit des Materials schwerlich einheitlicher als bei dem Kiefernmaterial ist, bewirkt *seine bessere Verteilung*, dass sich Regressionsgleichungen ergeben, deren Form dem normalen Verlauf des Wachstumsvorgangs entspricht. Es sei übrigens bemerkt, dass zwischen den beiden Materialien beim Anwenden der KOLLERschen Funktion eigentlich weder bezüglich der Bestimmtheit *(B)* noch hinsichtlich des Vertrauenskoeffizienten ein Unterschied besteht; die Verschiedenheiten der Ergebnisse erlangen im Grunde erst bei der Extrapolation Bedeutung.

6233. Berücksichtigung der Wirkung übriger Wachstumsfaktoren

119. Beim *Analysieren* der Wirkung übriger Wachstumsfaktoren *mittels des phasenweisen Schätzens* sind für das Fichtenmaterial als Residuale der ersten Phase (Δy_x) die der oben besprochenen Schätzungen der KOLLERschen Funktion angewandt worden. In der zweiten Phase entsprechen die Standardniveaus der zusätzlichen Veränderlichen, bei einem jeden Typ auf Grund *ihres gesamten Materials* angewandt, der Form der KOLLERschen Funktion für die Masse (z_V), die Grundfläche (z_G) und die Mittel- und Oberhöhe $(z_{Hm}$ bzw. $z_{Hd})$, während

Tabelle 119. Bedeutung einiger Wachstumsfaktoren im Erklären der Residuale der KOLLERschen Funktion (65.3)
OMT-Fichtenmaterial

Regressionsbeziehung	Die erklärenden Wachstumsfaktoren				
	Masse z_V	Grundfläche z_G	Mittelhöhe z_{Hm}	Oberhöhe z_{Hd}	Stammzahl z_N
A. *Eine Veränderliche:* Bestimmtheit *(B)*	0.318	0.212	0.178	0.082	0.009
Wert im F-Test der Signifikanz *(f: 1,60)*	28.6^{***}	16.4^{***}	13.2^{***}	5.48^{*}	0.562^{-}
B. *Zwei Veränderliche:* 1. Zusätzlich zur *Masse* (z_V) Bestimmtheit *(B)*	—	0.347	0.373	0.322	0.337
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,59)*		2.61^{-}	5.25^{*}	0.314^{-}	1.72^{-}
2. Zusätzlich zur *Grundfläche* (z_G) Bestimmtheit *(B)*	0.347	—	0.355	0.326	0.270
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,59)*	12.3^{***}		13.3^{***}	10.1^{***}	4.71^{*}
3. Zusätzlich zur *Mittelhöhe* (z_{Hm}) Bestimmtheit *(B)*	0.373	0.355	—	0.180	0.289
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,59)*	18.7^{***}	16.5^{***}		0.189^{-}	9.36^{**}
4. Zusätzlich zur *Oberhöhe* (z_{Hd}) Bestimmtheit *(B)*	0.322	0.326	0.180	—	0.107
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,59)*	21.1^{***}	21.7^{***}	7.18^{**}		1.66^{-}
5. Zusätzlich zur *Stammzahl* (z_N) Bestimmtheit *(B)*	0.337	0.270	0.289	0.107	—
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,59)*	29.7^{***}	21.4^{***}	23.6^{***}	6.58^{*}	
C. *Drei Veränderliche:* 1. Zusätzlich zur *Masse* (z_V) *und Mittelhöhe* (z_{Hm}) Bestimmtheit *(B)*	—	0.373	—		0.375
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,58)*		0.001^{-}			0.165^{-}
2. Zusätzlich zur *Grundfläche* (z_G) *und Mittelhöhe* (z_{Hm}) Bestimmtheit *(B)*	0.373	—	—		0.357
Wert im F-Test der Signifikanz des Zuschusses *(f: 1,58)*	1.67^{-}				0.109^{-}

sich diese bezüglich der Stammzahl (z_N) nur auf Anwendung des logarithmischen Glieds (x_2) der Gleichung (65.3) gründen. Die Eignung der benutzten Funktionen des Standardniveaus kann als *recht gut* gelten. Die Abweichungen von demselben vertreten also die Wirkung der zusätzlichen Veränderlichen laut der Gleichungsform (75.2).

In Tabelle 119 ist die Signifikanz verschiedener Kombinationen der zusätzlichen Veränderlichen bezüglich des *OMT*-Materials wiedergegeben. Die entsprechenden Testwerte bezüglich des *MT*-Materials sind mit diesen weit übereinstimmend. Man sieht, dass das Erklären der Reststreuung der Hauptveränderlichen am *effektivsten mittels der Masse* erfolgt, obgleich auch ihre Regression von der Grundfläche sowie der Mittelhöhe stark signifikant ist. Als zweite erklärende Variable zusätzlich zur Masse erweist sich die Mittelhöhe als deutlich der Grundfläche überlegen, wenngleich auch der von ihr gezeitigte Zuschuss gering, die übrigen hingegen noch geringer an Signifikanz ausfallen. Es ist bemerkenswert, dass sich mit der Kombination Grundfläche-Mittelhöhe-Stammzahl eine auffallend *schwache* Signifikanz einstellt, obgleich man theoretisch erwarten könnte, dass eine solche Kombination sogar sehr bedeutungsvoll wäre. Besonders interessant sind in der Tabelle die Unterschiede zwischen der Mittelhöhe und der Oberhöhe. Die *erstere* erweist sich in jeder Beziehung als *signifikanter*; bei *Myrtillus*-Typ fällt doch die Wirkung der Oberhöhe im Ganzen nicht ebenso überraschend gering aus.

Man kann also sagen, dass *zusätzlich zum Alter die Masse und die Mittelhöhe* deutlich die *zweckmässigste* das Wachstum erklärende *Kombination* ausmachen. Wenn man auf Grund dieser die auf der KOLLERschen Funktion (65.3) basierende Zuwachsfunktion aufstellt, erhält man dafür an Hand des Materials von VUOKILA folgende logarithmische Gleichungen:

$$OMT: \; \hat{y} = +\,0{,}9659 - 0{,}002334\,x_1 - 0{,}7133\,x_2 + 0{,}3434\,z_V + 0{,}4913\,z_{Hm}$$
$$MT: \; \hat{y} = +\,0{,}2924 - 0{,}005520\,x_1 - 0{,}1902\,x_2 + 0{,}3886\,z_V + 0{,}3605\,z_{Hm}$$

In den Funktionen gründen sich die Werte der zusätzlichen Veränderlichen auf das Ende der Messungsperiode, die Zuwachswerte wiederum auf ihre Mitte. Vom Standpunkt des Einflusses der verschiedenen Variablen hat dies rechnerisch keine wesentliche Bedeutung, obwohl es selbstverständlich in formaler Hinsicht nicht den an die Wachstumsfunktion zu stellenden Bedingungen entspricht. Es sei noch festgestellt, dass durch Einbeziehen der obengenannten zusätzlichen Veränderlichen für die Wachstumsfunktion als Vertrauenskoeffizient des Regressionsmittelwerts bei *OMT* 1,054 gefunden wird, während derselbe auf Grund des Alters allein den in Tabelle 108 angegebenen Wert 1,069 hat (entsprechend für *MT* sind 1,026 bzw. 1,094).

120. Wenn die zusätzliche Veränderliche der Gleichung (55.2) gemäss auf Grund ihrer Werte an sich einbezogen wird, erhält man im Vergleich mit der zuvor betrachteten Gleichung (56.2) für die Bestimmtheit (B) die in folgender Aufstellung angegebenen Werte.

Zusätzliche Veränderliche	Form der zusätzl. Veränderlichen	Bestimmtheit (B) *OMT*	*MT*
Masse	z_V	0,132	0,242
	$\Delta z_V = z_V - \bar{z}_V$	0,318	0,326
Grundfläche	z_G	0,148	0,296
	$\Delta z_G = z_G - \bar{z}_G$	0,212	0,261
Mittelhöhe	z_{Hm}	0,062	0,201
	$\Delta z_{Hm} = z_{Hm} - \bar{z}_{Hm}$	0,178	0,257

Ein *deutlicher Unterschied* ist somit feststellbar, je nachdem, in welcher Form die zusätzliche Veränderliche in der Regressionsgleichung enthalten ist (vgl. S. 55—56).

Tabelle 121. Wachstumsanalysen bezüglich der Waldtypen
Fichtenmaterial

Streuungskomponenten	Varianzanalyse der Reststreuungen: Betrag der Restquadratsummen	Freiheitsgrade	Durchschnittsquadrat	Wert im F-Test	Vollständige Kovarianzanalyse: Betrag der Restquadratsummen	Freiheitsgrade	Durchschnittsquadrat	Wert im F-Test
Streuung innerhalb der Waldtypen (= Zufallsstreuung)	0.6800	113	0.00602		0.6800	113	0.00602	
Streuung zwischen Regressions*koeffizienten*					0.0979	2	0.0489	*8.14****
					0.7779	115	0.00676	
Streuung zwischen Typen*mittelwerten*					0.2578	1	0.2578	*38.1****
Streuung zwischen *Waldtypen*	0.3557	3	0.1186	*19.7****				
Gesamtstreuung	1.0357	116			1.0357	116		

6234. Prüfung der Unterschiede zwischen den Wachstumsfunktionen

121₁. Das im Folgenden angewandte Vorgehen zum Prüfen der Unterschiede zwischen den Klassen der qualitativen Variation hat eigentlich zur Voraussetzung, dass die Klassen untereinander *balanciert* sind. Da das Material von VUOKILA bei seinen Waldtypen ungefähr gleich gross ist, kann man erachten, dass die besagte Voraussetzung bei ihnen *annähernd* erfüllt ist.

Das Fichtenmaterial bietet nur die Möglichkeit, den Unterschied zwischen den Waldtypen zu prüfen. Der Ausgangspunkt der *Varianzanalyse der Reststreuungen* (s. S. 78) besteht in diesem Fall aus der Reststreuung der Totalregression für das gesamte Fichtenmaterial. Die Reststreuungen der beiden waldtypenmässigen Regressionen liefern zusammen ihrerseits den Betrag der Zufallsstreuung, und die betreffende Differenz entspricht dem Betrag der Streuung zwischen Waldtypen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 121 zu sehen, und im Fichtenmaterial besteht somit zwischen den Waldtypen ein sehr signifikanter Unterschied, und ihre Zuwachsfunktionen sind deutlich *voneinander verschieden.*

121₂. Falls man eine eingehendere Analyse der Art der Regressionsbeziehung ausführen will, kann man *mittels der eigentlichen Kovarianzanalyse* (s. S. 78) die Signifikanz der Unterschiede sowohl zwischen den Regressionskoeffizienten als auch zwischen den Regressionsmittelwerten voneinander getrennt prüfen. Die Analyseberechnung in Tabelle 121 gründet sich auf das von SNEDECOR (1957, S. 394—399) angegebene Modell.

Auf Grund der Analyse kann man also feststellen, dass sowohl hinsichtlich der Regressionskoeffizienten als auch der Typmittelwerte sehr signifikante Unterschiede festzustellen sind. Von diesen liegt im F-Test der Wahrscheinlichkeitswert bei den letzteren deutlich höher. Dies weist abermals darauf hin, dass die Verschiedenheiten im Wachstumsvorgang *mehr in dessen Niveau als in seiner Wachstumsgeschwindigkeit* hervortreten.

6235. Bemessung der qualitativen Variation

121₃. Die Bemessung der Wirkung der qualitativen Wachstumsfaktoren durch *Indexwerte* wird beim Fichtenmaterial *auf Grund der Totalregression* des gesamten Materials ausgeführt (vgl. S. 80). Die Ergebnisse, erhalten mittels der KOLLERschen Funktion, gehen in entlogarithmierte Gestalt gebracht aus folgender Zusammenstellung hervor.

Waldtyp	Indexwert	
OMT	1.102	124
MT	0.890	100
Gesamtes Material	1	

122. Auf Grund des Fichtenmaterials sei auch ein Beispiel von der *Anwendung der Diskriminanzanalyse* (s. S. 82) wiedergegeben. Bei ihr kommt eine lineare Trennfunktion (vgl. LINDER 1960, S. 238—246) zur Anwendung, welche die Residuale der Totalregression des gesamten Materials als Grundlage hat. Die Trennfunktion ist deshalb hier im Prinzip nur als Funktion einer Variablen, der obengenannten Differenz $(D = b_0\, \Delta y_x)$ in Anwendung gebracht worden. Wenn man statt Δy_x dessen entsprechenden Differenzwert der Form (75.1) einsetzt, ergibt sich die Trennfunktion endgültig als Funktion von drei Variablen $(D = b_y y - b_1 x_1 - b_2 x_2)$, worin y, x_1 und x_2 denjenigen der Gleichung (65.3) entsprechen.

Für die eigentlichen Schätzungen der Parameter erhält man:

$b_y = +\,0.1211,\quad b_1 = -\,0.001085 \quad \text{und} \quad b_2 = +\,0.2753.$

Der Anschaulichkeit halber wurde die endgültige Trennfunktion unter Aufnahme auch des konstanten Gliedes so bestimmt, dass sie (vgl. ILVESSALO 1965, S. 377) die Mittelwerte.

$\bar{D}_{OMT} = \log_{10}140 \qquad \text{und} \qquad \bar{D}_{MT} = \log_{10}100$

angibt, womit ihre Gleichung wie folgt wird:

(122.1) $\quad D = 1.4855\,y + 0.01332\,x_1 - 3.3780\,x_2 + 6.0037.$

Die unter Verwendung dieser Trennfunktion für die verschiedenen Beobachtungen des Fichtenmaterials gefundenen Indexwerte variieren bei *OMT* zwischen 71—276 und bei *MT* zwischen 59—221. Die Werte der beiden Typen liegen betreffs der Grösse des Zuwachses *keineswegs getrennt* auseinander. Als Gesamtheit unterscheiden sie sich jedoch deutlich voneinander. Falls nämlich die Signifikanz der Trennfunktion in der von LINDER (op.c., S. 244) angegebenen Weise geprüft wird, erhält man im F-Test den Wert *13.5****, der (bei Freiheitsgraden f:3,115) weit über der entsprechenden Testgrenze $F_{0.001} = 5.8$ liegt. Auf Grund der Prüfung kann man also auf jeden Fall erachten, dass sich die beiden Typen des Fichtenmaterials hinsichtlich ihres Zuwachses *im Ganzen* bedeutend voneinander *unterscheiden.*

624. Material von Heikurainen betreffs Holzbestände von Entwässerungsgebieten

6241. Beschreibung des Materials

Im Laufe seiner Untersuchungen des Zustands und Holzbestands von Entwässerungsgebieten auf Mooren hat HEIKURAINEN (1959) zahlreiche Probeflächen ausgemessen, wobei seine Daten auch Angaben über den Zuwachs ihres Holzbestands enthalten. Sie wurden an durchschnittlichen Stellen stichprobenartig ausgewählter Bestandsfiguren gemessen (op.c., S. 10—13,66—68), und zwar waren diese stets *paarweise* so gelegen, dass eine der beiden Probeflächen (Probe a) am Graben entlang und die andere (Probe b) in der Mitte des betreffenden Felds lag. Durch dieses Vorgehen sollte die Streuung in der Masse des Holzbestands auf einem jeden Feld zum Vorschein gebracht werden. Die Grösse der Probeflächen betrug zumeist 5 Ar, an lockerbestandenen Stellen jedoch 10 Ar. Die Messung ihres Holzbestands wurde mit dem *Relaskop* vorgenommen. Die Zuwachsbestimmungen erfolgten nach der *Bohrspanmethode* mit einer Messperiode von 10 Jahren in den südlichen Teilen des Landes (Zonen I und II) und von 5 Jahren weiter nördlich (Zonen III—IV). Die Messungsergebnisse wurden mittels des Zuwachsindizes korrigiert (op.c. S., 69). HEIKURAINEN teilte das Land in fünf

klimatische Zonen ein (op.c., S. 108—110). Diese Zonen motiviert er ausdrücklich mit der Verschiedenheit im Zuwachs des Holzbestands.

Die Untersuchung von HEIKURAINEN enthält ein Verzeichnis des gesamten Primärmaterials mit mehreren Daten für jede Probefläche, womit sich die Möglichkeit bietet, dasselbe im Demonstrationsmaterial als Vertreter der Wachstumsanalyse auf Grund des temporären Zuwachsmaterials zu benutzen. Von den Probeflächen sind diejenigen von *Zwergstrauch-Reisermooren* (op.c., S. 153) herausgenommen worden, und zwar aus insgesamt 65 Beständen (davon 26 aus Zone I, 15 aus Zone II, 9 aus Zone III, 12 aus Zone IV und 3 aus Zone V).

Von den in den Daten enthaltenen Wachstumsfaktoren wurden als messbare Variablen die folgenden, in logarithmische Fassung gebracht, aufgenommen:

als Hauptveränderliche
- das *Alter des Holzbestands* (x), nach Altersklassen von 10 Jahren angegeben,

als zusätzliche Veränderliche
- das *Alter* des Holzbestands *zum Zeitpunkt der Entwässerung* (als z_E = Alter des Holzbestands abzüglich Alter der Entwässerung),
- die *Feldbreite* (z_F) (vgl. op.c., S. 179—182) sowie
- die *Masse* (z_V) einschliesslich Rinde.

Man konnte annehmen, dass in erster Linie die Wirkung dieser Wachstumsfaktoren im Regressionsmodell mitgenommen würde. Als Feldbreite wurde bei den a-Proben ihr Durchmesser benutzt, bei den b-Proben wiederum, die in der Mitte des Feldes lagen, die volle Feldbreite. Auf diese Weise findet die Wirkung der verschiedenen Lage der Probeflächen Berücksichtigung. Die Masse ist in Übereinstimmung mit dem Zuwachs auf die Zeitmitte der Messperiode umgerechnet worden. Als vierte zusätzliche Veränderliche kommt in der Analyse in Form eines *qualitativen* Wachstumsfaktors die besagte *Zoneneinteilung* hinzu, welche die allgemeinen klimatischen Verhältnisse wiedergibt.

6242. Schätzen der Zuwachsfunktion

123₁. Wie man auf Grund der Heterogenität des Materials auch folgern kann, liefert *die* KOLLER*sche Funktion* (65.3) *an sich* keine brauchbaren Ergebnisse. Bei dem gesamten Material entsprechen allerdings ihre Regressionskoeffizienten $(b_1 = -\,0{,}000814$ und $b_2 = +\,0{,}2153)$ ihrem Vorzeichen nach dem Verlauf des Wachstumsvorgangs, aber im übrigen würde ihn die so bestimmte Funktion nicht befriedigend beschreiben. Fernerhin hat die Bestimmtheit der Regressionsgleichung $(B = 0{,}010)$ keine Signifikanz. Von den zonenweisen Funktionen verläuft diejenige der Zone I gleichfalls zu flach, während wiederum die von Zone IV zu steil ist. Die übrigen schliesslich haben ungeeignete Vorzeichen. Unmittelbares Anwenden der KOLLERschen Funktion führt somit zu keinem nützlichen Ziel.

123_2. Als alternatives Mittel kommt hierbei Anwendung einer geeigneten von *ausserhalb des Materials stammenden Funktion* in der ersten Phase des Schätzens in Frage (vgl. S. 76). Als solche wurde die KOLLERsche Funktion des Zuwachses naturnormaler *CT*-Bestände (s. Zusammenstellung unter *Dem.B.* 124_2) gewählt, die auf Grund der Ertragstafeln von ILVESSALO (1920, S. 32) bestimmt worden ist (vgl. Tab. 108). Die Abweichungen von den Werten dieser machen den Ausgangspunkt der zweiten Phase (Δy_x) aus.

123_3. Die *Bedeutung der zusätzlichen Veränderlichen* im Erklären der besprochenen Abweichungen kommt nach Gleichung (55.2) zum Ausdruck. Auf Grund ihrer Werte im F-Test in Tabelle 124 kann man feststellen, dass jeder der betreffenden Wachstumsfaktoren schon allein vom Standpunkt der Regressionsbeziehung Bedeutung hat. Aus den hohen Testwerten im Fall der zwei und insbesondere der drei zusätzlichen Veränderlichen kann man schliessen, dass *alle* drei Veränderlichen in ihrer Wirkung weitgehend *voneinander unabhängig* sind, weshalb es angebracht ist, sie alle im Regressionsmodell einzubeziehen.

Tabelle 124. Wirkung einiger zusätzlicher Veränderlichen auf die Abweichungen bei der KOLLERschen Funktion (65.3)
Material von HEIKURAINEN

Kombination der zusätzlichen Veränderlichen	Alter z.Zt. der Entwässerung z_E	Feld-breite z_F	Masse z_V
1. *Eine* Veränderliche:			
Bestimmtheit *(B)*	0.053	0.141	0.268
Wert der Signifikanz im F-Test *(f:* 1,123)	*6.88**	*20.2****	*45.0****
2. *Zwei* Veränderliche:			
Wirkung der Veränderlichen als Zusatz zur Wirkung der Masse			
Bestimmtheit *(B)*	0.372	0.389	
Wert der Signifikanz des Zuschusses im F-Test *(f:* 1,122)	*20.2****	*24.0****	
3. *Drei* Veränderliche:			
Wirkung der Veränderlichen als Zusatz zur Wirkung der Masse und Feldbreite			
Bestimmtheit *(B)*	0.668		
Wert der Signifikanz des Zuschusses im F-Test *(f:* 1,121)	*102****		

124₁. Da sich die Phase mit der Hauptveränderlichen auf eine von ausserhalb des Materials herangezogene Wachstumsfunktion gründete, hat es sein eigenes Interesse, zu betrachten, ob die Wirkung derselben zum Vorschein kommt, nachdem die oben besprochene zweite Phase des Schätzens eventuell die Inhomogenität des Materials eliminiert hat. In diesem Sinn wurde ***noch eine weitere Phase*** im Schätzen durchgeführt, in welcher die zu erklärende Variable aus den Residualen $(\Delta y_{z'})$ der Regressionsgleichung mit allen drei zusätzlichen Veränderlichen bestand. Mittels der KOLLERschen Funktion (65.3) ergab sich für diese Phase (s. die Zusammenstellung unter *Dem.B. 124₂*) die Bestimmtheit *(B)* 0,026 mit dem Testwert der Signifikanz $F = 3{,}72^{*}$ *(f:*1,114) im Vergleich zu Norm $F_{0.05} = 3.95$. Hierin ist jedoch interessant, dass die ***Änderungen*** den Regressionskoeffizienten der naturnormalen *CT* sehr ***konsequent*** sind, weil ***sie eine Verlangsamung*** im Wachstumsvorgang ***bedeuten***, so dass sich die maximale Phase des Zuwachses von 74 auf 79 Jahre verschiebt. Eine Änderung dieser Art erscheint recht glaubhaft. Obwohl diese dritte Phase der Regressionsanalyse nicht signifikant ist, kann man trotzdem ihre Einbeziehung in die Konstruktion der endgültigen Zuwachsfunktion als gerechtfertigt ansehen.

124₂. In folgender Zusammenstellung wird das Vereinigen der drei im Obigen besprochenen Phasen im Schätzen der Regressionsgleichung betreffs des Zuwachses auf entwässerten Zwergstrauch-Reisermooren dargestellt.

Konstruieren der Kombinationsfunktion auf Grund der KOLLERschen Funktion (65.3)

Grundfunktion:
Regressionsgleichung naturnormaler CT-Kiefernbestände
$$y = -1.2845 - 0.007423x_1 + 1.2600x_2 + \Delta y_x$$
Zweite Phase:
Regressionsgleichung
$$\Delta y_x = a'_{I\text{-}V} - 0.4153z_E - 0.1663z_F + 0.9133z_V + \Delta y_{z'}$$
Dritte Phase:
Regressionsgleichung
$$\Delta y_{z'} = a''_{I\text{-}V} + 0.002379x_1 - 0.3425x_2 + \Delta y_{z''}$$
(124.1) Kombinationsfunktion:
$$y = a_{I\text{-}V} - 0.005044x_1 + 0.9176x_2 - 0.4153z_E - 0.1663z_F + 0.9133z_V + \Delta y_{z''}$$

Tabelle 125. Betrag des Zuwachses in verschiedenem Alter auf entwässerten Zwergstrauch-Reisermooren
Material von HEIKURAINEN

Alter →	10 J.	30 J.	50 J.	70 J.	90 J.	110 J.	130 J.	150 J.	170 J.	190 J.
	Jährlicher Zuwachs in fm/ha/Jahr ohne Rinde									
Zone: I	0.35	1.31	1.98	2.35	2.49	2.47	2.36	2.18	1.98	1.76
II	0.22	0.85	1.28	1.52	1.61	1.60	1.52	1.41	1.28	1.14
III	0.22	0.84	1.27	1.50	1.59	1.58	1.51	1.39	1.26	1.13
IV	0.15	0.58	0.87	1.04	1.10	1.09	1.04	0.96	0.87	0.78
V	0.10	0.36	0.55	0.65	0.69	0.68	0.65	0.60	0.55	0.49

Von den zusätzlichen Veränderlichen der kombinierten Funktion hat die Masse einen zuwachssteigernden Einfluss (vgl. S. 113). Vergrössern der Feldbreite wiederum, d.h. des Abstands der Probefläche vom Graben, setzt den Zuwachs herab. Desgleichen ist der Zuwachs in einer gegebenen Alterphase umso geringer, je jünger der Bestand zur Zeit der Entwässerung war.

125₁. Einen Begriff von der *Zuverlässigkeit* der so erzielten Zuwachsfunktion kann man an Hand der Restvarianz der dritten Phase gewinnen. Auf Grund derselben findet man den Wert $s_{\hat{y}} = 0{,}0265$. Da das Material als Gesamtheit (nicht zonenweise) behandelt worden ist, hat man hierbei als Zahl der Freiheitsgrade *f:* 118 zu betrachten. So ergibt sich dann die Vertrauensgrenze $t_{0.05}s_{\hat{y}} = 0{,}05247$ und entsprechendermassen der Vertrauenskoeffizient 1.123, d.h. die Grenzen des Vertrauensbereiches betragen etwa ±12 %.

125₂. Die ***Kombinationsfunktion*** (124.1) kann ***vereinfacht*** werden, indem gewisse Wachstumsfaktoren auf ein geeignetes Durchschnittsniveau gebracht werden, wobei ihre Wirkung entweder konstant wird oder in der Wirkung der Hauptveränderlichen enthalten ist. Im Fall des Holzbestands der Entwässerungsgebiete kann man für das Alter des Holzbestands z.Zt. der Entwässerung $(= z_E)$ und für die Feldbreite $(= z_F)$ das Durchschnittsniveau des ganzen Materials benutzen. Die Wirkung der Masse $(= z_V)$ ist jedoch dermassen stark, dass es am zweckmässigsten ist, dieselbe als Funktion des Alters zu berücksichtigen. Die der KOLLERschen Funktion entsprechende Form führt jedoch bei dem Demonstrationsmaterial zu keinem befriedigenden Ziel. In Tabelle 125 sind deshalb die Werte für die Masse gesondert mittels einer Ausgleichsfunktion von der Form der Wachstumskoeffizientenfunktion bestimmt worden.

6243. Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion

125₃. Beim ***Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion*** ist das Beobachtungsmaterial, das sich teils auf 5jährige und teils auf 10jährige Messperioden gründet, der Gleichung (70.2) entsprechend vereinigt worden. Der hier angewandte Wachstumskoeffizient hat die formale Schwäche, dass er auf Grund der Masse einschliesslich Rinde zum Anfangszeitpunkt der Periode mit dem Zuwachs der Periode ohne Rinde bestimmt worden ist. In Ermangelung der Rindenprozente konnten nämlich die Massen ohne Rinde nicht errechnet werden. Zum Demonstrationszweck kann jedoch die Eignung eines solchen Wachstumskoeffizienten als hinreichend angesehen werden.

Neben dem Altersfaktor *(x)* mit dem Wert des Exponenten $c = {}^2/_3$ (s. S. 95) sind beim Schätzen die gleichen zusätzlichen Veränderlichen wie zuvor bei Anwendung der KOLLERschen Funktion mit einbezogen worden. Jedoch wurde die Masse auf den Anfangszeitpunkt

Tabelle 126. Wirkung einiger Veränderlichen auf den Wert des Wachstumskoeffizienten
Material von HEIKURAINEN

Veränderlichenkombination	Altersfaktor x	Alter z.Zt. der Entwässerung z_E	Feldbreite z_F	Masse z_V
1. *Eine* Veränderliche:				
Bestimmtheit *(B)*	0.437	0.389	0.054	0.284
Wert im F-Test ihrer Signifikanz *(f:* 1,124)	*95.6****	*78.3****	*7.05***	*48.9****
2. *Zwei* Veränderliche, die zweite zusätzlich zu x:				
Bestimmtheit *(B)*		0.439	0.468	0.460
Wert im F-Test der Signifikanz für den Zuschuss *(f:* 1,123)		*0.327⁻*	*7.09***	*5.03**
3. *Drei* Veränderliche, die dritte zusätzlich zu x und z_F:				
Bestimmtheit *(B)*		0.471		0.505
Wert im F-Test der Signifikanz für den Zuschuss *(f:* 1,122)		*0.587⁻*		*8.95***
4. *Vier* Veränderliche, die vierte zusätzlich zu x, z_F und z_V:				
Bestimmtheit *(B)*		0.510		
Wert im F-Test der Signifikanz für den Zuschuss *(f:* 1,121)		*1.323⁻*		

der Messperioden bezogen. Die *Analyse der Signifikanz der zusätzlichen Veränderlichen* in Tabelle 126 gleicht derjenigen bei der KOLLERschen Funktion im Vorstehenden.

Die Bedeutung des Bestandesalters im Zusammenhang mit der Wachstumskoeffizientenfunktion geht aus der Aufstellung *sehr klar* hervor. Dagegen zeigt sich die hohe Signifikanz des Alters z.Zt. der Entwässerung gesondert nur als scheinbar; sie rührt in der Hauptsache von der *engen* Korrelation mit dem Altersfaktor her. Gleiches trifft teilweise auf die Masse zu, und somit hat schliesslich die *Feldbreite* unter den zusätzlichen Veränderlichen die *grösste* Signifikanz. Diejenige der Masse steigt jedoch an, wenn die Wirkung der Feldbreite eliminiert wird.

126. Die mehrfache Regressionsgleichung der Wachstumskoeffizientenfunktion wurde auf Grundlage der inneren Variation der Zonen geschätzt (vgl. *Dem.B.* 125_1). Die Werte ihrer Koeffizienten sind in der folgenden Aufstellung gezeigt, in welcher der Anschaulichkeit halber auch die des Alters z.Zt. der Entwässerung mit in Rücksicht gezogen worden ist.

Wachstumsfaktor	Regressionskoeffizient Symbol	Schätzung
Alter	b_x	+0,2689
Feldbreite	b_F	−0,0936
Masse	b_V	−0,0983
Alter z.Zt. der Entwässerung	b_E	+0,0627

Der Altersfaktor hat gegebenerweise einen positiven Wert. Dagegen erscheint die Entwässerung in gewissem Sinne *entgegengesetzt* zu wirken, denn je älter der Bestand zur Zeit der Entwässerung gewesen ist, umso grösser wird der betreffenden Schätzung gemäss der Wachstumskoeffizient. Zunahme der Masse ihrerseits setzt den Wachstumskoeffizient herab, wie sich schon zuvor (S. 114) gezeigt hat, und *gleiches gilt* für die Feldbreite, d.h. den Abstand der Probefläche vom Graben.

Tabelle 127. Wachstumskoeffizienten auf entwässerten Zwergstrauch-Reisermoore
Material von HEIKURAINEN

Alter des Holzbestands	10 J.	30 J.	50 J.	70 J.	90 J.	110 J.	130 J.	150 J.
Zone: I	1.157	1.071	1.049	1.037	1.031	1.026	1.023	1.021
II	1.156	1.070	1.048	1.036	1.030	1.025	1.022	1.020
III	1.150	1.065	1.043	1.032	1.025	1.021	1.017	1.015
IV	1.154	1.068	1.046	1.035	1.028	1.024	1.020	1.018
V	1.149	1.064	1.042	1.030	1.024	1.019	1.016	1.014

127_1. Auch *im Fall eines* so *heterogenen Materials* wie das der Entwässerungsgebiete *erweist sich* die mittels der *Wachstumskoeffizientenfunktion* ausgeführte Analyse *deutlich als zuverlässiges Verfahren*, das ein richtiges Bild von der Entwicklung des Wachstumsvorgangs gibt. Es sei noch festgestellt, dass man beim Schätzen der Wachstumskoeffizientenfunktion gesondert für eine jede Zone in sämtlichen Fällen eine zufriedenstellend normale Form der Funktion erhält.

Tabelle 127 enthält nur im Interesse der Anschaulichkeit Werte der *Wachstumskoeffizienten einiger Zeitpunkte* für die verschiedenen Zonen. Bei ihrem Bestimmen wurden die verschiedenen zusätzlichen Veränderlichen auf gleiche Weise wie zuvor (*Dem.B.* 125_2) im Zusammenhang mit der KOLLERschen Funktion berücksichtigt. Die Werte der Aufstellung spiegeln gegebenerweise zugleich auch Werte des *Zuwachsprozents* wider, indem ihre Dezimalstellen eben dieses angeben.

6244. Schätzen der Indexwerte

127_2. Für die Kombinationsfunktion (124.1) kann man die Werte der Konstante a für die verschiedenen Zonen bestimmen. Diese sind in folgender Aufstellung aufgeführt. Auf Grund derselben wiederum sind die Indexwerte bestimmt worden, indem für Zone I der logarithmische Wert $a_I = +2$ gesetzt wurde (vgl. S. 82).

Schätzungen des konstanten Glieds der Kombinationsfunktion (124.1) und die entsprechenden Zonenindizes

Zone	I	II	III	IV	V
a	−1.590	−1.614	−1.729	−1.679	−1.742
Index	100	93	73	82	70

Wie man sieht, vertritt in der Aufstellung die Zone IV ein günstigeres Wachstumsniveau als Zone III. Dieser Unterschied, wie bei dem parallelen Fall der Wachstumskoeffizientenfunktion (*Dem.B.* 127_3), ist selbstverständlich nicht auf Fälle ausserhalb dieses Materials zu verallgemeinern. Es wäre ja möglich, Unterschiede zwischen den Zonen auf ihre Signifikanz zu testen, aber in diesem Fall hätte jedoch eine solche Prüfung infolge des geringen Materialumfangs keine Bedeutung.

Auf Grund des vereinigten Werts der Konstanten der Kombinationsfunktion und der Massenfunktion erhält man folgende Indexwerte, die den Zuwachsbeträgen der Tabelle 125 entsprechen und vielleicht *besser* die Unterschiede zwischen den Zonen wiedergeben.

Zone	I	II	III	IV	V
Index	100	65	64	44	28

127_3. Auf gleicher Grundlage wie oben wurden in der nachstehenden Aufstellung die Werte des konstanten Glieds a der Wachstumskoeffizientenfunktion und die entsprechenden Indexwerte für die verschiedenen Zonen bestimmt.

Zone	I	II	III	IV	V
a	+0.217	+0.196	+0.203	+0.179	+0.147
Index	100	95	97	92	85

Auch betreffs der Unterschiede zwischen den Zonen gelten bezüglich der Indexwerte die gleichen Feststellungen wie bei der KOLLERschen Funktion. Die Zahlen in der Zusammenstellung beinhalten, dass der Wachstumskoeffizient und zugleich das Zuwachsprozent *umso niedriger* ist, *je weiter nördlich* man geht. Die Unterschiede zwischen den Indexwerten sind indessen in diesem Fall deutlich *geringer*, als wenn sie sich auf den Zuwachs selbst gründen.

7. ÜBER DIE ZUWACHSBERECHNUNG FÜR DEN PRAKTISCHEN BEDARF

Die Zuwachsberechnung ist zweifellos eines der schwierigsten Probleme der Holzmesslehre, und zwar unabhängig davon, welcher Art die jeweils vorliegende praktische Aufgabe ist. Schon allein die zuverlässige Messung des bereits stattgefundenen Zuwachses ist nicht leicht, und doch spielen in der praktischen Tätigkeit *Prognosen des künftigen Zuwachses die bedeutendste Rolle.* Hierbei gestaltet sich die Aufgabe einleuchtenderweise noch viel schwieriger. Einen recht beachtenswerten Einfluss auf die Unsicherheit der Zuwachsvoraussagen haben eben die unsicheren Grundlagen der Zuwachsbestimmungen. Diese können u.a. von den Schwierigkeiten herrühren, die sich mit dem Beschaffen und der Behandlung des benötigten Beobachtungsmaterials (LIHTONEN 1943, S. 70—72) oder auch mit dem Vorgehen der Zuwachsbestimmung für Prognosefälle an sich (vgl. z.B. KUUSELA 1953) verknüpfen.

Für den praktischen Bedarf haben bisher beim Ausführen von Zuwachsbestimmungen *die allgemeinen Zuwachstafeln* eine ausschlaggebende Stellung eingenommen. Ohne Zweifel werden sie auch weiterhin ihren eigenen Gebrauchswert behalten. Die auszuführende Aufgabe ist oft solcher Art, dass es in Verbindung mit ihr nicht zweckmässig ist, Mittel auf gesonderte Zuwachsbestimmungen aufzuwenden, und man kann sich damit begnügen, solche Tafeln heranzuziehen. Dieses Vorgehen kann in den einzelnen Fällen entweder ausschliesslich mit dem Kostenaufwand motiviert werden, oder man kann sonst erachten, dass die Art und Bedeutung der Aufgabe keine grössere Genauigkeit bei der Zuwachsberechnung erfordert. Falls man dabei neben dem Alter noch Berücksichtigung der Wirkung irgendwelcher anderen Wachstumsfaktoren angliedern will, so ist dies in Verbindung mit dem Benutzen der allgemeinen Zuwachstafeln z.B. mittels Hilfstabellen über *geeignete Korrektionsfaktoren* möglich, die sich auf ein gewisses Standardniveau gründen. Derart lässt sich der Anwendungsbereich und die Brauchbarkeit solcher allgemeinen Tafeln erweitern, ohne dass dadurch ihre Benutzung noch wesentlich erschwert wird.

Es muss jedoch betont werden, dass es in viel zahlreicheren Fällen, als dies bisher in der Praxis erfolgt ist, angebracht wäre, die Zuwachsberechnung auf irgendeine Weise vorzunehmen, welche die allgemeinen Zuwachstafeln wesentlich an Zuverlässigkeit übertrifft. Indem man sich mit einem solchen Vorgehen

begnügt, setzt man oft unnötigerweise den Wert der gesamten Arbeit auch in ihren übrigen Teilen herab, womit man sich eine Vergeudung der darauf angewandten Mittel zu Schulden macht. Der Umfang des mit der Zuwachsberechnung verbundenen Arbeitsaufwands und die *Schwierigkeit der Aufgabe wird leicht*, und häufig ohne tatsächlichen Grund, *übertrieben.*

Die Zuwachsberechnung an Hand allgemeiner Tafeln kann nie eine solche Zuwachsbestimmung ersetzen, die *sich auf ein eigenes*, unmittelbar aus dem unter Bearbeitung stehenden Gebiet stammendes *Material gründet* (vgl. z.B. WECK 1950b), und sowohl hinsichtlich der Repräsentativität des Materials als auch der Art und Genauigkeit *seiner Behandlung sachgemäss erfolgt* (vgl. MAGIN 1960, S. 136). Falls es nicht möglich ist, in genügendem Umfang eigenes Material für die Zuwachsbestimmung zu beschaffen, dann kann man ein seiner Menge nach an sich unzulängliches Material dennoch in geeigneter Weise gesichert als Grundlage der Berechnung verwenden. Ein solches Vorgehen kann auch aus anderen Gründen gerechtfertigt sein, wenn beispielsweise die Art des Einsammelns des Materials eine solche ist, dass man es als unzweckmässig erachten müsste, die auszuführenden Berechnungen auf demselben allein aufzubauen.

In derartigen Fällen ist es zweckmässig, die sachgemässe *Brauchbarkeit der Wachstumsfunktion in geeigneter Weise sicherzustellen.* Beim Anwenden der Wachstumskoeffizientenfunktion genügt es hierzu oft, dieselbe an einen geeigneten Zeitpunkt (T) zu binden (s. S. 71), wenn nur das allgemeine Niveau des Wachstums im Material im übrigen genügend richtig bemessen ist. Ferner ist es auch oft als zweckmässig anzusehen, eine geeignete, hinreichend zuverlässige Stützfunktion (s. S. 41) zum Sicherstellen der Ergebnisse der Zuwachsberechnungen heranzuziehen.

In natürlicher Weise empfiehlt sich als solche Stützfunktion die Wachstumsfunktion, die einem gewissen ausgedehnteren Bereich entspricht, inbesondere einem solchen, in dem das betreffende Arbeitsgebiet selbst enthalten ist. Als eine solche Stützfunktion oder als Material für dieselbe kann man beispielsweise Material solcher Art benutzen, wie es das im Demonstrationsmaterial zuvor verwendete bestandesweises Kiefernmaterial von NYYSSÖNEN (1954) und das Fichtenmaterial von VUOKILA (1956) sind. Benutzt man ein solches, wenn auch in seiner Menge hinreichendes Material eines beschränkteren Gebiets, so muss man genügende Kritik üben, und *die Eignung des Materials zu seinem Zweck muss hinreichend ermittelt werden.* Ein geeignetes Stützmaterial kann unter richtiger Anwendung wohl zu einem brauchbaren Ziel führen, aber bei unrichtiger Anwendung kann es ebensogut bedeutende Verfälschung der Ergebnisse herbeiführen. Demnach ist es auch offensichtlich am zweckmässigsten, zuerst die Brauchbarkeit derjenigen Wachstumsfunktion zu untersuchen, die nur auf dem eigenen Material beruht, und erst auf Grund dieser Ermittlung die Notwendigkeit einer Stützfunktion und ihre Anwendungsweise zu erwägen.

8. ZUSAMMENFASSUNG

An Hand dessen, was sich vorstehend im Verlauf der Untersuchung ergeben hat, können ihre wesentlichsten Ermittlungen bezüglich der Wachstumsanalyse der Baumindividuen, wie auch des Baumbestands und anderer von ihnen gebildeter Populationen, in folgenden Hauptpunkten zusammengefasst werden:

1. Die gegenwärtigen Möglichkeiten setzen ja voraus, dass man die Untersuchung des Wachstumsvorgangs stets *auf Heranziehung zweckdienlicher mathematisch-statistischer Methoden gründen* muss. *Auch für den praktischen Bedarf* beabsichtigte Verfahren der Zuwachsberechnung sollte man derart ausarbeiten, dass in ihnen ebenfalls *in möglichst weitem Umfang* die von der statistischen Analyse dargebotenen Möglichkeiten verwertet werden können.

2. Mit eventuellen Ausnahmen, die auf Umstände der Untersuchung oder insbesondere der Anwendungen selbst zurückgehen, sollte man stets danach streben, die Wachstumsanalyse *dynamisch* durchzuführen, indem man den Wachstumsvorgang in seiner Gesamtheit der Betrachtung unterzieht. Man kann dann erwarten, dass man auch hinsichtlich seiner einzelnen Phasen zum besten Resultat gelangt.

3. Die dynamische Analyse des Wachstumsvorgangs kann mit Rücksicht auf den praktischen Bedarf auf Grund das Wachstum *messender* Verfahren oder unter Verwendung das Wachstum *beschreibender* Funktionen geschehen. Das Ziel der Aufgabe entscheidet jeweils letzten Endes, welches der beiden Vorgehen man zweckmässiger anwenden wird. Wenn dagegen eine eigentliche Forschung über den Wachstumsvorgang in Frage steht, führen Verfahren nach dem letzteren Prinzip mit grösserer Zuverlässigkeit zum Ziel.

4. Auf den Wachstumsvorgang wirkt eine Unzahl verschiedenartiger Wachstumsfaktoren ein, die bezüglich des Wesens und der Intensität ihrer Wirkung sehr weitgehend verschieden sind. Die Aufgabe der Wachstumsanalyse besteht darin, aus diesen zum Einbeziehen in die Analyse *solche Wachstumsfaktoren auszusondern, die* entweder unmittelbar oder mittelbar *Bedeutung* für dieselbe *besitzen*. Der Einfluss der ausserhalb der Analyse verbliebenen Faktoren ihrerseits zeigt sich als rein zufällige Variation, deren Betrag insbesondere im Hinblick auf die Zuverlässigkeit der Ergebnisse Bedeutung zukommt. Die in der Wachstumsanalyse erscheinenden, systematisch wirkenden Wachstumsfaktoren wiederum können getrennt nur ihre eigene *primäre* Wirkung zur Schau bringen, aber sie spiegeln häufiger *sekundäre* Wirkungen vieler verschiedener Faktoren wider, welche sich hiermit am besten in Erscheinung bringen lassen. Solche sekundäre

Faktoren wirken eigentlich nicht selbst unmittelbar auf das Wachstum ein, sondern sie stehen lediglich mit dem Gesamtbetrag der Wirkung mehrerer verschiedener, primärer Wachstumsfaktoren in Korrelation.

5. *Eine Sonderstellung* unter den auf den Wachstumsvorgang einwirkenden Wachstumsfaktoren *nimmt die Zeit* in Form des Alters *ein*, und die Grundlinie ihrer Wirkung soll stets zum Vorschein kommen. Auf diese Grundlinie wirken ihrerseits solche in ihrem Grundwesen unveränderliche Wachstumsfaktoren ein, die im Wachstumsmilieu selbst enthalten sind. Unter diesen wirken sich die *genetischen Faktoren* im Wachstumsvorgang selbst aus, während die *Standortsfaktoren* auf die Verhältnisse seiner Umwelt ihre konstante Wirkung ausüben. Ferner können von ausserhalb des eigentlichen Wachstumsmilieus exzeptionelle Wachstumsfaktoren im Verlauf des Wachstumsvorgangs seinen Gang bleibend verändern, und zwar sind solche Veränderungen durch ihre Plötzlichkeit und Stärke gekennzeichnet. In Wäldern im Naturzustand treten als solche gewöhnlich verschiedene Naturkatastrophen auf. In den Wirtschaftswäldern dagegen hat *die Tätigkeit des Menschen* in dieser Beziehung die entscheidendste Rolle.

6. Für den Ausgangspunkt der Funktionen, die das Wachstum beschreiben, wird die Hypothese gehalten, nach welcher der Wachstumsvorgang als ein *stochastischer Prozess* vorausgesetzt wird, dessen Grundmechanismus aus dem an die Zeit gebundenen *evolutionären* Prozess besteht. Das Modell für seinen Trend ist eine *Zufallsfunktion*, deren von dem Alter abhängiger Grundverlauf bezüglich seines Rhythmus und seines Niveaus jeweils von den unveränderlichen Wachstumsfaktoren des Wachstumsmilieus bestimmt wird. Als ihre *Realisierungen* treten wiederum die *Wachstumsfunktionen* in Erscheinung, die solche einzelner Baumindividuen sowohl auch von diesen gebildeter Populationen verschiedener *Art* und zugleich auch *verschiedener Stufen*, d.h. eines Bestands, eines Waldbetriebes und auch noch grösserer Waldgesamtheiten sein können. Weiter sind die *Parameter* der Wachstumsfunktionen *Realisierungen unabhängiger Zufallsgrössen*, die als ihren Erwartungswert die entsprechenden Parameter der betreffenden Zufallsfunktion haben.

7. Beschreibung des evolutionären Trendprozesses des Wachstumsvorgangs kann entweder in der Form des *Zuwachses*, der die Wachstumsintensität wiedergibt, oder auf Grund des *Wachstums* erfolgen, das die Summe der Zuwachsbeträge vom Zeitpunkt seines Ausgangs bis zu einem gegebenen Alterszeitpunkt ausmacht. Es ist auch möglich, den Wachstumsvorgang mittels der *relativen* Wachstumsbeträge zu beschreiben. Diese können als Verhältnis entweder des Zuwachses *(Zuwachsprozent)* oder des Wachstums *(Wachstumskoeffizient)* zum Anfangskapital der Berechnungsperiode angegeben werden.

8. Beim Analysieren des Wachstumsvorgangs auf Grund des Zuwachses stehen schon heutzutage verhältsmässig einfache und rechnerisch *zweckmässige Funktionsformen* zur Verfügung, mittels deren es offenbar möglich ist, brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Damit sie ein richtiges Bild vom Verlauf des Wachstumsvorgangs liefern, muss das zu ihrer Schätzung benutzte Material deutlich

genug *die erforderlichen Phasen* des Zuwachses *festlegen*. Auch ist es möglich, diese Voraussetzung in anderer Weise in Erfüllung zu bringen. Da der Wachstumsvorgang der Bäume in Wirtschaftswäldern in der Regel nicht Zeit hat, seine letztere Wendephase zu erreichen, erhält man vom abnehmenden Teil des Zuwachsverlaufs im allgemeinen auf Grund der Beobachtungen keinen tauglichen Begriff.

9. Es hat den Anschein, dass *vorläufig* noch *keine Funktionsform für das Wachstum* ausgearbeitet worden ist, die den Wachstumsvorgang der Bäume in einer Weise zu beschreiben vermag, die in finnischen Verhältnissen befriedigend und rechnerisch hinreichend einfach handzuhaben wäre. Indessen kann man auf Grund des Funktionstyps des Wachstumskoeffizienten auch das Wachstum beschreiben. Voraussichtlich können jedoch auch für das Wachstum eigene anwendbare Funktionsformen ausgedacht werden.

10. Es scheint offensichtlich, dass sich zum *Beschreiben des relativen Wachstums* auch vom Standpunkt des praktischen Bedarfs *besser* ein *auf dem Wachstumskoeffizienten* als ein auf dem Zuwachsprozent basierender Funktionstyp eignet. Im Vergleich mit dem Funktionstyp des Zuwachses hat derjenige des Wachstumskoeffizienten im Hinblick auf die Wachstumsanalyse als besonderen Vorteil seine grosse *Unabhängigkeit von dem Material:* er behält im allgemeinen seine richtige Grundform davon unabhängig bei, in welcher Weise sich das Beobachtungsmaterial hinsichtlich des Verlaufs des gesamten Wachstumsvorgangs verteilt. Sein Ausgang bleibt bei ihrer Anwendung immer richtig, und wenn der Zeitpunkt des Alterstods sich je nach der Beschaffenheit des Materials mit der Wirklichkeit unvereinbar gestaltet, ist es möglich, die Funktion für den Wachstumskoeffizient derart zu schätzen, dass sie an einen *geeigneten*, erwägungsmässigen *Zeitpunkt gebunden* wird. Die Beobachtungen haben in verschiedenen Phasen des Wachstumsvorgangs auf den Verlauf der Wachstumskoeffizientenfunktion einen verschiedengradigen Einfluss, der beim Schätzen mittels *geeigneter Gewichtung* berücksichtigt werden kann.

11. Der Wachstumskoeffizient ist besonders *geeignet zum Ausführen der Zuwachsprognosen*, da er unmittelbar die Masse am Ende der Berechnungsperiode ergibt. Aus diesem Grunde kann man ihn zweckmässig beispielsweise in verschiedenartigen waldbetrieblichen Entwicklungsberechnungen in Anwendung bringen. Wenn man dabei eine Funktionsform benutzt, geschieht dies am zweckmässigsten logarithmisch. Für den praktischen Bedarf können auch die geeigneten Tafeln angezeigt sein.

12. Dem evolutionären Grundprozess des Wachstumsvorgangs schliesst sich immer eng ein davon getrennter Teilprozesskomplex an, der sich als eine Störwirkung auf den vom ersteren beschriebenen idealen Verlauf des Wachstumsvorgangs bezieht. Vom Standpunkt der Wachstumsanalyse ist das *Ergründen dieses Störungsprozesses ebenso bedeutungsvoll* wie dasjenige des Trendprozesses. Wenn man ihn dabei nicht berücksichtigt, so wird der Wachstumsvorgang statt des idealen Verlaufs seines Trends in dem durchschnittlichen Niveau beschrieben, das von der zusammengesetzten Wirkung dieses Störungsprozesses bestimmt wird. Je mehr hierin systematische Verfälschung enthalten ist, umso stärker verändert dies in einer nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Richtung das Bild, welches man vom Verlauf des Wachstumsvorgangs erhält. Die rein zufällige Störwirkung wiederum kommt im Niveau der Zuverlässigkeit der Ergebnisse zum Ausdruck, die in der Wachstumsanalyse erzielt werden.

13. Die Analyse des Störungsprozesses kann entweder auf Grund einer *messbaren* Regressionsbeziehung erfolgen, oder man berücksichtigt in ihr die *qualitativen Wachstumsfaktoren* im Rahmen geeigneter Klasseneinteilungen. In ein und derselben Analyse kann man gegebenerweise auch beide Vorgehen anwenden. Wenn mittels des ersteren der Betrag der endgültigen Zufallsvariation herabgesetzt wird, kann dann die Prüfung der qualitativen Wachstumsfaktoren entsprechend effektiver ausgeführt werden. Desgleichen ist es möglich, durch Berücksichtigung der qualitativen Wachstumsfaktoren die massliche Analyse zu effektivieren.

Wenn sich die Analyse auf eine messbare Abhängigkeitsbeziehung gründet, kann die Wirkung der störenden Wachstumsfaktoren *direkt* an Hand ihrer Wirkungsintensität gemessen werden. Im Fall der qualitativen Wachstumsfaktoren muss man zuerst durch Testen die zweckmässigen, die betreffenden Wirkungsbeziehungen möglichst gut wiedergebenden Klasseneinteilungen aufsuchen und erst *in deren Rahmen* ihre Wirkungsintensität so bemessen, dass die *Schätzungen eine zusammenhängende und konsequente Gesamtheit* bilden.

14. Die in Verbindung mit dieser Untersuchung hervorgebrachten Gesichtspunkte sind in erster Linie *prinzipieller* Art. Sowohl zu Forschungszwecken als auch für den praktischen Bedarf stattfindende Anwendungen setzen Ausführen auf einem hinreichenden Material basierender *Fundamentaluntersuchungen* voraus. Mit Hilfe dieser sollte man ihrerseits die Eignung der verschiedenen Verfahren erwägen und die zweckmässigste Form zur Beschreibung des Wachstumsvorgangs ermitteln.

15. Das Vornehmen einer Wachstumsanalyse hat auch in Anwendungen für den praktischen Bedarf stets *umso grössere Bedeutung, je besser* den Sonderverhältnissen und *dem Aufbau* eines jeden Bestands, Waldbetriebs oder Waldgebiets *entsprechend* sie ausgeführt werden kann. Jedoch entscheidet letzten Endes die Art der Aufgabe, wann es besser dem Zweck entspricht, dass man sich damit begnügt, die Zuwachsprognosen auf allgemeine Zuwachstafeln oder allgemeine Wachstumsfunktionen zu gründen. Dieses Prinzip kann derart verschiedengradige Anwendung finden, dass man bei einem Beobachtungsmaterial, das als *selbständige Grundlage* für eine Wachstumsprognose *unzulänglich* ist, *zur Sicherstellung* des richtigen Verlaufs des Wachstumsvorgangs *als Stütze* in geeignetem Mass *allgemeine*, das Wachstum beschreibende *Daten* heranzieht. Ein brauchbares Ergebnis kann so in dem vom Beobachtungsmaterial bestimmten Niveau des Wachstums gesichert werden.

Literaturverzeichnis

ASSMANN, E. 1961: Waldertragskunde. — München.

ASSMANN, E.—FRANZ, F. 1965: Vorläufige Fichten-Ertragstafel für Bayern. — Forstw.Centralbl. 84, S. 13—43.

BACKMAN, G. 1939: Die organische Zeit. — Acta Univers. Lund. N.S. Sect. 2.Bd. 35.7.

—»— 1942: Das Wachstum der Bäume. — Roux'Arch. Entwicklungsmech. Organismen 141, S. 455—459.

—»— 1943: Wachstum und die organische Zeit. — Bios 15.

BAILEY, N. T. J. 1967: The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences. 3.Print. — New York.

BERTALANFFY, L.v. 1951: Theoretische Biologie. II: Stoffwechsel, Wachstum. 2.Aufl. — Bern.

BLANCKMEISTER, J. 1956: Die räumliche und zeitliche Ordnung im Walde des mitteleuropäischen Raumes. — Leipzig.

COCHRAN, W. G. 1947: Some consequences when the assumptions for the analysis of variance are not satisfied. — Biometrics 3, S. 22—38.

—»— 1957: Analysis of covariance: Its nature and uses. — Biometrics 13, S. 261—281.

CRAMÉR, H. 1951: Sannolikhetskalkylen och några dess användningar. 2.uppl. — Uppsala.

DAEVES, K.—BECKEL, A. 1958: Grosszahlmethodik und Häufikeitsanalyse. 2.Aufl. — Weinheim.

DELBECK, K. 1965: Metoder for tilvekstberegninger i glissen skog. Summary: Methods for calculation of increment for open forests. — Meld. Inst. Skogstaks. Norges Lantbr. høgskole 2.

DEMING, W. E. 1948: Statistical adjustement of data. 4.Print. — New York.

DITTMAR, O. 1961: Zuwachs und Ertrag langfristiger Fichtendurchforstungsversuchsflächenreihen des Thüringer Waldes und des Harzes in Abhängigkeit von Bestockungsdichte und Standort. — Arch. Forstw. 10, S. 458—476.

DRAPER, N. R.—SMITH, H. 1966: Applied regression analysis. — New York.

EISENHART, C. 1947: The assumptions underlying the analysis of variance. — Biometrics 3, S. 1—21.

ERTELD, W. 1957: Einiges über die ertragskundliche Forschungsmethodik der Gegenwart. — Arch. Forstw. 6, S. 421—431.

ERTELD, W.—HENGST, E. 1966: Waldertragslehre. — Leipzig.

FISZ, M. 1958: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. — Berlin.

GRAYBILL, F. A. 1961: An introduction to linear statistical models. I. — New York.

HALD, A. 1952: Statistical theory with engineering applications. — New York.

HEIKURAINEN, L. 1959: Tutkimus metsäojitusalueiden tilasta ja puustosta. Referat: Über waldbaulich entwässerte Flächen und ihre Waldbestände in Finnland. — Acta For. Fenn. 69.1.

HILDEBRANDT, G. 1967: Der laufende Zuwachs in der Forsteinrichtung. — Schriftenr. Forstl. Abt. Albert-Ludwigs-Univers. Freiburg i.Br. 6.

HUITSON, A. 1966: The analysis of variance. — London.

ILVESSALO, Y. 1920: Kasvu- ja tuottotaulut Suomen eteläpuoliskon mänty-, kuusi- ja koivumetsille. Referat: Ertragstafeln für die Kiefern-, Fichten und Birkenbestände in der Südhälfte Finnlands. — Acta For. Fenn. 15.

—»— 1963: IV valtakunnan metsien inventointi. 2. Maan eteläpuoliskon metsänhoitolautakuntien alueryhmät. Summary: Fourth national forest inventory. 2. Southern forestry board districts. — Comm. Inst. For. Fenn. 57.4.

—»— 1965: Metsänarvioiminen. — Porvoo.

JAGLOM, A. M. 1959: Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen. — Berlin.

JOHNSSON, H. 1953: Hybridaspens ungdomsutveckling och ett försök till framtidsprognos. — Sv. Skogsvårdsf. Tidskr. 51, S. 73—96.

JONSSON, B. 1962: Om barrblandskogens volymproduktion. Summary: Yield of mixed coniferous forests. — Medd. Stat. Skogsförs.inst. 50.8.

KALELA, A. 1949: Kasviyhdyskunnista ja metsätyypeistä. In: Suuri metsäkirja, S. 33—72. — Porvoo.

KENDALL, M. G. 1965: A course in multivariate analysis. 3.impress. — London.

KENDALL, M. G.—STUART, A. 1966: The advanced theory of statistics. 3: Design and analysis, and time-series. — London.

KUUSELA, K. 1953: Zur Theorie der forstlichen Zuwachsberechnung auf Grund der periodischen Messung. — Acta For. Fenn. 60.1.

—»— 1964: Increment-drain forecast for a large forest area. — Acta For. Fenn. 77.5.

KUUSELA, K.—KILKKI, P. 1963: Multiple regression of increment percentage on other characteristics in scotch-pine stands. — Acta For. Fenn. 75.4.

KUUSELA, K.—NYYSSÖNEN, A. 1962: Tavoitehakkuulaskelma. Summary: The cutting budget for a desirable growing stock. — Acta For. Fenn. 74.6.

LIEBOLD, E. 1962: Ein neues statistisches Verfahren zur Ermittlung der Konstanten der Wachstums- und Zuwachsfunktion nach G. Backman. — Arch. Forstw. 11, S. 808—821.

LIENERT, G. A. 1962: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. — Meisenheim am Glan.

LIHTONEN, V. 1943: Tutkimuksia metsän puuston muodostumisesta. Tuottohakkuulaskelma. Referat: Untersuchungen über die Bildung des Holzvorrates des Waldes. — Acta For. Fenn. 51.2.

—»— 1944: Piirteitä metsätalouden järjestelyn rakennemuodoista Suomessa. Referat: Über die Strukturformen der Forsteinrichtung in Finnland. — Acta For. Fenn. 52.4.

—»— 1959: Metsätalouden suunnittelu ja järjestely. — Porvoo.

LINDER, A. 1960: Statistische Methoden. 3.Aufl. — Basel.

LOKKI, O. 1960: On the analysis of variance with unequal group size. — Soc. Scient. Fenn. Comment. Physico-Math. XXIV.12.

LÖNNROTH, E. 1927: Zur Frage der Waldbetriebsregelung mit besonderer Berücksichtigung der Waldverhältnisse Finnlands. — Acta For. Fenn. 32.1.

LUDWIG, W. 1929: Vergleichende Untersuchungen über Wachstumsgesetze. — Biolog. Centralbl. 49, S. 735—758.

LYR, H.—POLSTER, H.—FIEDLER, H. J. 1967: Gehölzphysiologie (mit Kap. X: LYR, H.—HOFFMANN, G.: Wachstum und Umwelt). — Jena.

MAGIN, R. 1960: Ertragsregelung auf standörtlicher Grundlage. — Mitt. Staatsforstverw. Bayerns 31, S. 131—136.

MATHER, K. 1954: Statistische Analysen in der Biologie. — Wien.

MICHAJLOW, J. 1952: Mathematische Formulierung des Gesetzes für Wachstum und Zuwachs der Waldbäume und Bestände. — Schweiz. Zeitschr. Forstw. 103, S. 368—380.

MIKOLA, P. 1950: Puiden kasvun vaihteluista ja niiden merkityksestä kasvututkimuksissa. Summary: On the variations in tree growth and their significance to growth studies. — Comm. Inst. For. Fenn. 38.5.

MULTAMÄKI, S. E. 1923: Tutkimuksia ojitettujen turvemaiden metsänkasvusta. Referat: Untersuchungen über das Waldwachstum entwässerter Torfböden. — Acta For. Fenn. 27.1.

MÜLLER, U. 1915: Lehrbuch der Holzmesskunde. 2.Aufl. — Berlin.

NIKLAS, H.—MILLER, M. 1926: Begründung unserer Stellungnahme zum Wirkungsgesetz von E. A. Mitscherlich. — Forstw. Centralbl. 48, S. 698—709.

NYYSSÖNEN, A. 1954: Hakkauksilla käsiteltyjen männiköiden rakenteesta ja kehityksestä. Summary: On the structure and development of Finnish pine stands treated with different cuttings. — Acta For. Fenn. 60.4.

NÄSLUND, M. 1944: Den gamla norrländska granskogens reaktionsförmåga efter genomhuggning. Referat: Die Reaktionsfähigkeit des alten norrländischen Fichtenwaldes nach Durchhauung. — Medd. Stat. Skogsförs.anst. 33, S. 1—212.

OKSBJERG, E. B. 1959: Om miljöns inflytande på skogsträds växtrytm. Summary: Some examples of relationship between growth-rhythme and environment in forests trees. — Norrl. Skogsvårdsf. Tidskr. 1959, S. 353—378.

PESCHEL, W. 1938: Die mathematischen Methoden zur Herleitung der Wachstumsgesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. — Thar. Forstl. Jahrb. 89, S. 169—247.

PETRINI, S. 1948: Skogsuppskattning och skogsindelning. — Stockholm.

PETTERSON, H. 1932: Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök, en bearbetning och ett program. Zusammenfassung: Die Durchforstungsversuche der Forstlichen Versuchsanstalt Schwedens, eine Bearbeitung und ein Programm. — Sv. Skogsvårdsf. Tidskr. 30, S. 199—219.

—»— 1937: Utvecklingsprognoser för skogsbestånd. — 1937 års Nord.skogskongr. Exkurs. II — Stockholm.

PFANZAGL, J. 1962: Allgemeine Methodenlehre der Statistik. II. — Berlin.
PRODAN, M. 1951: Aus der Holzmesslehre. — Forstarchiv 22, S. 73—80.
—»— 1961: Forstliche Biometrie. — München.
—»— 1965: Holzmesslehre. — Frankfurt a.M.
QUENOUILLE, M. H. 1957: The analysis of the multiple time-series. — London.
REEVE, E. O. R.—HUXLEY, J. S. 1947: Some problems in the study of allometric growth, S. 121—156 und
RICHARDS, O. W.—KAVANAGH, A. J. 1947: The analysis of growing form, S. 188—230, beide in: Essays on growth and form presented to D'Arcy Wentworth Thompson. — Oxford.
RICHTER, A. 1963: Einführung in die Forsteinrichtung. — Radebeul.
SCHLETTER, A. 1954: Betrachtungen zur Weckschen Methode der Wachstumsdiagnosen. — Arch. Forstw. 3, S. 193—205.
SCHNEIDER, B. 1963: Die Bestimmung der Parameter im Ertragsgesetz von E.A. Mitscherlich. — Biometr. Zeitschr. 5, S. 78—95.
SIRÉN, G. 1950: Alikasvoskuusten biologiaa. Summary: On the biology of undergrown spruce. — Acta For. Fenn. 58.2.
SNEDECOR, G. W. 1957: Statistical methods. 5.Edit. — Ames, Iowa.
SPURR, S. H. 1952: Forest Inventory. — New York.
STEEL, R. G. D.—TORRIE, J. H. 1960: Principles and procedures of statistics. — New York.
TALLIS, G. M. 1968: Selection for an optimum growth curve. — Biometrics 24, S. 169—177.
THOMASIUS, H. 1962: Diskussion der Backmanschen Wachstums- und Zuwachsfunktion und der Methoden zur Bestimmung ihrer Konstanten. — Arch. Forstw. 11, S. 1013—1051.
—»— 1964: Allgemeine Betrachtungen über Wachstumskurven und Wachstumsfunktionen. — Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 13, S. 715—722.
—»— 1965a: Kritische Bemerkungen zur Frühdiagnose mit Hilfe von Wachstumsfunktionen. — In: Tagungsber. Nr. 69 Deutsch. Akad. Landwirtschaftswiss. Berlin, S. 181—188.
—»— 1965b: Kritik der Wachstumsfunktion von G. Backman. — Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 14, S. 1019—1031.
TÖRNQUIST, L. 1958: A method for calculation changes in regression coefficients and inverse matrices corresponding to changes in the set of available data. — Skand. Aktuarie-tidskr. 1957, S. 219—226.
VUOKILA, Y. 1956: Etelä-Suomen hoidettujen kuusikoiden kehityksestä. Summary: On the development of managed spruce stands in southern Finland. — Comm. Inst. For. Fenn. 48.1.
—»— 1960: Siperialaisten lehtikuusikoiden kehityksestä ja merkityksestä maamme metsätaloudessa. Summary: On development of Siperian larch stand and their importance to forestry in Finland. — Comm. Inst. For. Fenn. 52.5.
—»— 1965: Functions for variable density yield tables of pine based on temporary sample plots. — Comm. Inst. For. Fenn. 60.4.
WEBER, E. 1961: Grundriss der biologischen Statistik. 4.Aufl. — Jena.
WECK, J. 1950a: Zur Weiterentwicklung der Waldwachstumskunde. — Forstw. Centralbl. 69, S. 12—22.
—»— 1950b: Über die Brauchbarkeit von Wachstumsgesetzen als diagnostisches Hilfsmitte der Waldwachstumskunde. — Forstw. Centralbl. 69, S. 584—605.
—»— 1951a: Forstliche Etragsforschung. — Forstarchiv 22, S. 13—22.
—»— 1951b: Wachstumsdiagnosen. Beispiele für ihre praktische Durchführung. — Forstarchiv 22, S. 135—138.
—»— 1953: Anwendung von Wuchsgesetzen als Methode der forstlichen Zuwachsforschung. — Allg. Forstzeitschr. 1953, S. 39—43.
—»— 1955: Forstliche Zuwachs- und Ertragslehre. 2.Aufl. — Radebeul.
WEIHE, J. 1961a: Die Beschreibung und Analyse des Höhenwachstumsablaufes von Fichten mit dem Wachstumsgesetz von Backman. — Allg. Forst- u. Jagdz. 132, S. 1—6.
—»— 1961b: Massen- und Stärkenwachstum der Fichte als Funktion des Höhenwachstums. — Allg. Forst- u. Jagdz. 132, S. 131—136.
WILLIAMS, E. J. 1959: Regression analysis. — New York.
WOHLFAHRT, E. 1953: Waldkunde. I: Von dem Wesen und der Soziologie des Waldes. — Frankfurt a.M.

ACTA FORESTALIA FENNICA

EDELLISIÄ NITEITÄ — PREVIOUS VOLUMES

Helsinki 1969. Uudenmaan Kirjapaino O.Y.