ÜBER DIE ERMITTELUNG DER QUERFLÄCHE EINES STAMMES

VON
T. HEIKKILÄ

HELSINKI 1927

HELSINKI 1927
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Über die Ermittelung der Querfläche eines Stammes.

Die Querfläche eines Stammes kann wegen ihrer elliptischen Form nicht mittelst nur eines Durchmessers genau ermittelt werden. Bei genauen und besonders wissenschaftlichen Ermittelungen werden daher im allgemeinen zwei aufeinander senkrechte oder speziell der grösste und kleinste Durchmesser gemessen. Nachdem von SCHMIDTBORN[1] bewiesen worden ist, dass die Querfläche eines Stammes nahe elliptisch ist, wird dieselbe bei den genauesten Ermittelungen aus der Flächenformel der Ellipse nach Einsetzung des grössten und kleinsten Durchmessers berechnet. Gewöhnlich wird die Querfläche aber entweder aus dem grössten und kleinsten Durchmesser oder häufiger aus zwei beliebigen aufeinander senkrechten Durchmessern nach dem arithmetischen Mittel der Durchmesser oder als Mittel aus den betreffenden Kreisflächen berechnet. Die Grösse des dabei entstehenden Fehlers soll im folgenden entwickelt werden.

Der Querschnitt des Stammes sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b (Fig. 1). Sie besitzt also folgende Formel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

An diesem Stamme wird ein beliebiger Durchmesser mittelst einer gewöhnlichen Messkluppe gemessen. Wird der eine Schenkel dieser durch die *Tangente AB* dargestellt, so ist die Senkrechte, die vom Mittelpunkte O aus auf diese Tangente gefällt ist, gleich dem halben gemessenen Durchmesser. Da aber der Endpunkt derselben auf der Tangente AB liegt, so ist sie grösser als der betreffende halbe wirkliche Durchmesser, der grösste und kleinste Durchmesser ausgenommen, welche auf den Tangenten in den Endpunkten senkrecht stehen.

[1] Allg. Forst- und Jagd-Zeitung, 1863, S. 408 ff.

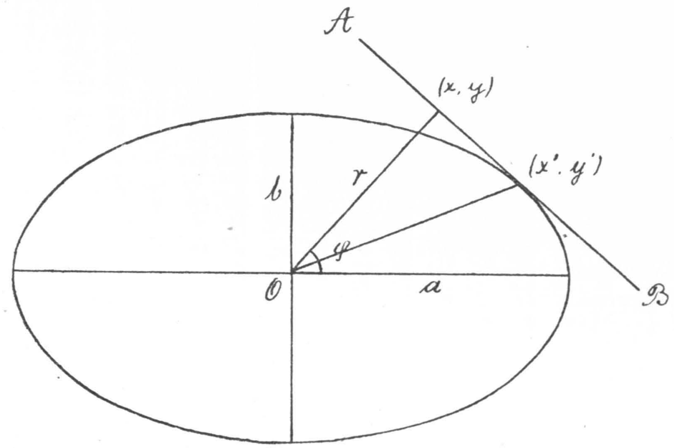

Fig. 1.

Der Endpunkt (x, y) der Senkrechten bewegt sich auf einer Kurve, welche gänzlich ausserhalb der Ellipse liegt und diese nur in den Endpunkten der Achsen berührt. Lasst uns die Gleichung dieser Kurve herleiten! Da der Punkt (x, y) zugleich auf der Tangente und der Senkrechten, die von dem Nullpunkt des Koordinatensystems aus auf die Tangente gefällt ist, liegt, und der Punkt (x', y') den Berührungspunkt der Tangente auf der Ellipse darstellt, so bekommt man folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} y - y' = -\dfrac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'); \\ y = \dfrac{a^2 y'}{b^2 x'} x; \\ \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1. \end{array}\right.$$

Durch Elimination vo x' und y' bekommt man die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

oder durch Einsetzung von Polarkoordinaten und Division durch den Faktor r^2, der immer grösser als Null ist:

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

Werden nun zwei aufeinander senkrechte beliebige Durchmesser des Stammes mittelst einer Kluppe gemessen und die Querfläche als Mittel aus den betreffenden Kreisflächen berechnet, so wird der Fehlen auf

folgende Weise hergeleitet. Wenn wir die halben aufeinander senkrechten Durchmesser mit r_1 und r_2 bezeichnen, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi; \\ r_2^2 &= a^2 \cos^2 (\varphi + 90^\circ) + b^2 \sin^2 (\varphi + 90^\circ) \\ &= a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Das Mittel aus den Kreisflächen ist dann:

$$\frac{\pi r_1^2 + \pi r_2^2}{2} = \frac{\pi a^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \pi b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{2} = \frac{\pi a^2 + \pi b^2}{2}.$$

Der die Querfläche behaftende Fehler Δg ist:

$$\Delta g = \frac{\pi a^2 + \pi b^2}{2} - \pi a b = \frac{\pi}{2}(a - b)^2.$$

Also:

Bei der Berechnung der Querfläche als Mittel aus zwei Kreisflächen ist der Fehler unabhängig davon, welche aufeinander senkrechten Durchmesser mit der Kluppe gemessen werden. Die spezielle Messung des grössten und kleinsten Durchmessers gewährt keine grössere Genauigkeit.

Wird aber die Querfläche nach dem arithmetischen Mittel der Durchmesser berechnet, so können folgende zwei extremen Fälle betrachtet werden:

1. Die gemessenen Durchmesser sind der grösste und kleinste Durchmesser. In diesem Falle ist der Fehler $\Delta_1 g$:

$$\Delta_1 g = \pi \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \pi a b = \frac{\pi}{4}(a - b)^2.$$

2. Die gemessenen Durchmesser sind von gleicher Grösse. In diesem Falle bekommt die Querfläche denselben Wert wie oben, wenn dieselbe als Mittel aus den betreffenden Kreisflächen berechnet wurde. Werden nämlich die halben gleich grossen Durchmesser mit r bezeichnet, so ist die Querfläche in beiden Fällen gleich πr^2. Folglich ist auch der Fehler $\Delta_2 g$ gleich gross, oder:

$$\Delta_2 g = \frac{\pi}{2}(a - b)^2.$$

Also:

Bei der Berechnung der Querfläche nach dem aritmetischen Mittel zweier aufeinander senkrechten Durchmesser variiert der Fehler zwischen zwei

Grenzwerten, von denen der grössere dem bei der ersten Berechnungsweise erhaltenen Fehler und der kleinere der Hälfte davon gleich ist. Der kleinste Fehler wird bei der Messung des grössten und kleinsten Durchmessers erhalten.

Werden also zwei beliebige aufeinander senkrechte Durchmesser gemessen, so gewährt die zweite Berechnungsweise im Einzelfalle keine grössere Sicherheit, obgleich der mittlere Fehler etwas kleiner ist. Bei der Messung des grössten und kleinsten Durchmessers aber verdient dieselbe wegen des nur halb so grossen Fehlers einen entschiedenen Vorrang.